

**UNIVERSIDAD DEL CEMA  
Buenos Aires  
Argentina**

Serie  
**DOCUMENTOS DE TRABAJO**

**Área: Ingeniería Informática**

**MODELOS Y SIMULACIÓN PARA  
APROXIMAR EL VALOR DE PI**

**Gastón A. Addati, Fernando Celano y Juan Churruarín**

**Agosto 2016  
Nro. 591**

**[www.cema.edu.ar/publicaciones/doc\\_trabajo.html](http://www.cema.edu.ar/publicaciones/doc_trabajo.html)  
UCEMA: Av. Córdoba 374, C1054AAP Buenos Aires, Argentina  
ISSN 1668-4575 (impreso), ISSN 1668-4583 (en línea)  
Editor: Jorge M. Streb; asistente editorial: Valeria Dowding <jae@cema.edu.ar>**



**Modelos y Simulación para Aproximar el valor de Pi**

**Gastón A. Addati, Fernando Celano y Juan Churruarín\***

**ABSTRACT**

El valor de Pi, se sabe que es un valor irracional. Este valor, de infinitas cifras decimales, ha despertado el interés particular de muchos científicos y personas en todo el mundo, sobre todo a lo largo de la historia.

Parecería ser que encontrar nuevas cifras decimales del valor de Pi, se ha vuelto a lo largo del tiempo, un desafío más que interesante para muchos matemáticos.

En el presente trabajo se diseñarán simulaciones para estimar el valor del número Pi. Se describirán y se utilizarán los modelos denominados: “de agujas de Buffon” y el método de Monte Carlo para ejecutar simulaciones considerando diferentes tamaños o valores como entrada, utilizando números pseudoaleatorios generados por computadora. Una vez obtenidos los resultados, se compararán con el valor real de Pi, para determinar qué tan buenas son las aproximaciones, en función del tamaño de la muestra generada.

---

\* Los puntos de vista expresados en este trabajo son de exclusiva responsabilidad de sus autores y no necesariamente expresan la posición de la Universidad del CEMA.

## Introducción:

En este trabajo se lleva a cabo una descripción de los métodos de simulación para estimar el valor del número Pi, partiendo de la base del conocimiento del significado de un sistema. A partir de la complejización de los sistemas de información y de la información en sí, las personas comenzaron a pensar en la forma adecuada de “maquetar” los hechos y sus ecosistemas, de manera que dichos resultados se acerquen de forma certera a la realidad. Este proceso de “maqueta” se refiere al diseño y armado de un modelo que brinde determinadas respuestas en función de los parámetros establecidos como “entradas” al sistema.

Se desea aprovechar el poder de cálculo que provee la computación moderna, para poder modelar, e implementar (simular) utilizando un lenguaje visual de programación, los experimentos que permitirán estimar el tan conocido y utilizado valor de Pi.

## Algunos Conceptos Preliminares a considerar

### **Sistemas**

Muchas veces al intentar identificar el significado de sistema, nos encontramos con una concepción colectiva inclinada a *“un método o conjunto de métodos ordenados para alcanzar una solución a un determinado problema”*. Para el campo que estamos analizando, la simulación de sistemas, encontramos definiciones más específicas de sistema. Aracil y Gordillo (1997) define a un sistema como:

*“Un objeto formado por un conjunto de partes entre las que se establece alguna forma de relación que las articula en la unidad que es precisamente el sistema. Un sistema se nos manifiesta como un aspecto de la realidad dotado de cierta complejidad precisamente por estar formado por partes en interacción. Esta interacción coordina a las partes dotando al conjunto de una entidad propia. Las partes y la interacción entre ellas, son los elementos básicos en esta concepción de sistema”*.

La forma de representar la porción de realidad que nos rodea, las partes relacionadas que conforman nuestro sistema a estudiar, es posible gracias a la abstracción. La concepción de la realidad puede variar para cada uno de los observadores de la realidad a la cual nos enfrentamos. La principal

dificultad que se nos presenta es el dimensionamiento de la realidad que queremos representar con nuestro sistema.

La forma de dimensionar una porción de realidad, es modelizar la porción de realidad que nos encontramos analizando. Para poder entender la modelización debemos conocer de qué trata un modelo.

*“Un modelo es una representación de la realidad desarrollado con el propósito de estudiarla. En la mayoría de los análisis no es necesario considerar todos los detalles de la realidad, entonces, el modelo no sólo es un sustituto de la realidad sino también una simplificación de ella”.*

### **Modelos**

Los modelos son una herramienta fundamental en el estudio de diversas disciplinas, ya que son el medio de comprensión de los sistemas que se encuentren involucrados en el análisis. De acuerdo al campo que nos encontremos examinando desarrollaremos un modelo acorde a las necesidades que demande.

Existen diferentes formas de modelización:

- Modelos verbales: descripciones de los conceptos relacionados de forma lógica, representándolas a través de gráficos, diagramas, etc.
- Modelos físicos: representación del modelo a través del maquetado o la implementación de simuladores.
- Modelos de estructura: representación de aspectos específicos que son relativos o causales propios del modelo.
- Modelos de comportamiento: figuran las reacciones del sistema a estímulos *externos*.

Además de los modelos anteriormente nombrados, existen otros que son más especializados de acuerdo al nivel de complejidad y al ámbito de estudio. Pueden diferenciarse en modelos abstractos (compuestos por conceptos, planes, hipótesis e ideas. Aquí, los símbolos representan atributos y objetos, que muchas veces sólo existen en el pensamiento de las personas) o físicos (compuestos por equipos, por maquinaria y por objetos y cosas reales. Pueden ser descritos en términos cuantitativos de desempeño). Ackoff (1971) marca la diferencia entre ambos modelos:

*"Un sistema abstracto es aquel en que todos sus elementos son conceptos. Un sistema concreto es aquel en el que por lo menos dos de sus elementos son objetos".*

Además de la diferenciación entre modelos abstractos y físicos los modelos pueden diferenciarse en continuos (cambian de forma continua con el paso del tiempo) o discretos (cambia de estado en una cantidad numerable de instantes de tiempo), y en determinísticos (modelos cuya solución para determinadas condiciones, es única y siempre la misma) o estocásticos (representan sistemas donde los hechos suceden al azar, lo cual no es representativo. Se conoce la probabilidad de ocurrencia y su distribución de probabilidad).

### ***Simulación***

A partir de la complejidad de emular los estados y los ambientes de comportamientos a analizar, es que nace la simulación de sistemas. Robert Shannon (1975) explica:

*"La simulación es el diseñar y desarrollar un modelo computarizado de un sistema o proceso y conducir experimentalmente con este modelo con el propósito de entender el comportamiento del sistema del mundo real o evaluar varias estrategias con las cuales puedan operar el sistema."*

La simulación ha ganado terreno gracias a la aparición de herramientas computacionales. El desarrollo de software de gran complejidad ha permitido acercarnos cada vez más resultados más congruentes con la realidad. ¿Cuál es la ventaja de la simulación a la hora de sacar conclusiones? Thomas H. Naylor enumera una serie de ventajas acerca de la simulación:

- Se puede estudiar el efecto de los cambios internos y externos del sistema, al hacer alteraciones en el modelo del sistema y observando los efectos de esas alteraciones en el comportamiento del sistema.
- Otorga una observación detallada del sistema, permitiendo un mejor entendimiento del sistema y por tanto sugerir estrategias que mejoren la operación y eficiencia del sistema.
- Se puede utilizar como instrumento pedagógico para educar a los estudiantes en campos como el análisis estadístico.

- Se puede usar para experimentar acerca de eventos de los cuales se tiene poca información y anticipar resultados no previstos.
- Puede prestar ayuda para el entrenamiento personal en determinados ambientes donde se precisan determinadas características de representación y así lograr la experiencia requerida.
- Realizar una evaluación exhaustiva del sistema para su correcto entendimiento y posteriormente sugerir estrategias que mejoren su operación y eficiencia.

Por otra parte, realizar una simulación presenta las siguientes desventajas:

- Son difíciles de ser aceptados.
- Pueden dar un erróneo sentimiento de seguridad.
- Si bien muchas veces los resultados son cercanos, no son óptimos.
- Las simulaciones a través de computadoras son muy costosas y requieren mucho tiempo para desarrollarse y validarlas.
- Al tener que repetirse una determinada cantidad de veces para optimizar el resultado produce que los costos de simulación sean elevados.

Proceso de desarrollo de una simulación

- Definición del sistema: Descripción del modelo o del sistema.
- Análisis del sistema: Descripción de las interacciones lógicas entre las variables de decisión.
- Formulación de un modelo: Definición completa del sistema a través de código lógico matemático de la interacción de las variables.
- Selección del lenguaje: Utilización del lenguaje que mejor se adapte a las necesidades de la simulación.
- Codificación del modelo: Generar instrucciones necesarias para que el modelo sea llevado adelante.
- Validación del modelo: Determinar qué nivel de representación de la realidad tiene un modelo.
- Experimentación: Determinar las distintas alternativas que pueden ser evaluadas, distinguiendo las distintas variables de entrada, optimizando de esta forma el acercamiento a las variables de respuesta del sistema real.

## Ejemplos de simulación

Dentro del ámbito de la simulación existen distintas disciplinas que experimentan usualmente con procesos de simulación, y de ellos podemos extraer claro ejemplos:

- Simulación de un sistema de colas: Estudio y análisis de colas cuya representación matemática sería muy difícil de analizar.
- Simulación de estado de inventarios: Analizar de manera más sencilla y concreta sistemas de inventario donde todos sus parámetros son estocásticos.
- Simulación de un proyecto de inversión: Evaluar el efecto de cierto tipo de decisiones en las demás variables macroeconómicas.
- Simulación de estados financieros: Analizar estrategias de crecimiento para alcanzar los objetivos y metas de corto, mediano y largo plazo.

## **Definición del modelo para estimar el valor de Pi**

### *Modelo de agujas de Buffon*

Este modelo de estimación fue desarrollado por Buffon en 1777 (Cheney, W. y Kincaid, D. 1985). El modelo consiste en arrojar agujas en una superficie plana con líneas dibujadas, igualmente espaciadas, donde el espacio que separa a las líneas es mayor que el largo de las agujas. Determinando la probabilidad de que una aguja cualquiera corte a alguna de las líneas de la superficie, se puede estimar el valor de Pi.

Tomando el largo de las agujas igual a la distancia que separa las líneas, se simplifican los cálculos para la deducción de la relación entre la probabilidad de corte y el valor de Pi.

Para definir si una aguja de largo  $L$  corta a alguna de las líneas separadas por una distancia  $d$ , se considera el punto medio de la aguja,  $m$ , y su distancia  $x$  hacia la línea más cercana. Además, se considera el ángulo  $\theta$  entre las líneas y la aguja.

Como las agujas se arrojan al azar, determinando  $m$  y  $\theta$  al azar, queda determinada la posición de la aguja. Por definición,  $m$  varía entre en 0 y  $d/2$ , y  $\theta$  varía entre 0 y  $\pi$ . Como ambas variables aleatorias siguen una distribución uniforme, la densidad de probabilidad para cada caso será:



$$f(m) = \begin{cases} 2/d, & 0 \leq m \leq d/2 \\ 0, & \forall \text{ otro } m \end{cases} \quad (E.1)$$

$$f(\theta) = \begin{cases} 2/\pi, & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0, & \forall \text{ otro } \theta \end{cases} \quad (E.2)$$

Como las variables aleatorias son independientes, la densidad conjunta de probabilidad será el producto de las variables:

$$f(x) = \begin{cases} 4/d\pi, & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \text{ y } 0 \leq m \leq d/2 \\ 0, & \forall \text{ otro } m, \theta \end{cases} \quad (E.3)$$

Esta distribución describe la probabilidad de ubicación de la aguja en el plano. Utilizando trigonometría básica, puede verse que una aguja cortará a una línea cuando:

$$m \leq L/2 \operatorname{sen}(\theta) \quad (E.4)$$

Entonces puede obtenerse la probabilidad de corte de manera analítica, considerando ese límite para  $m$ :

$$P_{\text{Corte}} = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{m=0}^{L/2 \operatorname{sen}(\theta)} 4/d\pi \, dm d\theta = 2L/d\pi \quad (E.5)$$

De esta manera, se puede estimar el valor de  $\pi$ , estimando el valor de  $P_{\text{Corte}}$  utilizando los valores de la simulación, donde:

$$P_{\text{Corte}} \approx c/N \quad (E.6)$$

Donde  $c$  es la cantidad de agujas que cortan a las líneas, y  $N$  es la cantidad de agujas totales. A partir de las ecuaciones 5 y 6 se obtiene:

$$\pi \approx N2L/dc \quad (E.7)$$

La Ecuación 7 se puede simplificar aún más, si se considera que la distancia entre líneas es el doble que el largo de las agujas. En ese caso, la estimación de Pi resulta:

$$\pi \approx N/c \quad (E.8)$$

### **Modelo con el método de Monte Carlo**

Bajo el nombre de Método Monte Carlo o Simulación Monte Carlo se agrupan una serie de procedimientos que analizan distribuciones de variables aleatorias usando simulación de números aleatorios. En el caso de la estimación de Pi, se usan valores aleatorios para aproximar un valor determinístico.

El uso del método de Monte Carlo para aproximar el valor de Pi consiste en dibujar un cuadrado, y dentro de ese cuadrado, dibujar un círculo con diámetro de igual medida que uno de los lados del cuadrado. Luego se dibujan puntos de manera aleatoria sobre la superficie dibujada. Los puntos que están fuera del círculo y los que están dentro, sirven como estimadores de las áreas internas y externas del círculo.

El área total del cuadrado con lado  $L$  es:

$$A_T = L^2 \quad (E.9)$$

El área total del círculo dentro del cuadrado es:

$$A_C = \pi * (L/2)^2 \quad (E. 10)$$

La relación de áreas entonces es:

$$A_C/A_T = \pi/4 \quad (E. 11)$$

A partir de una estimación de esta relación, se multiplica por 4, y se obtiene el estimador de Pi.

Para la simulación, se usan números pseudoaleatorios con distribución uniforme. A partir de esos números se forman las coordenadas de los puntos que se van a dibujar dentro del cuadrado. Una vez dibujados una cantidad suficiente de puntos, se estimará Pi mediante la fórmula:

$$\pi \approx 4 * \frac{Puntos_{interiores}}{Puntos_{totales}} \quad (E. 12)$$

### Ejecución de las simulaciones

Las simulaciones se realizaron utilizando una aplicación específicamente programada para calcular aproximaciones de Pi con los métodos de Buffon y el método geométrico de Monte Carlo. La herramienta calcula automáticamente m cantidad de simulaciones con muestras de tamaño n, para cada método, y registra los resultados en archivos, para ser analizados posteriormente.

Para ejecutar simulaciones individuales, se usan ventanas con gráficos, para facilitar la comprensión del modelo que se está simulando.

En la caso del método de Buffon, se muestra un gráfico con una grilla, en donde se dibujan las “agujas” posicionadas al azar. En rojo se dibujan las agujas que cortan las divisiones de la grilla, en azul las que no cortan - Ver Figura 1 -

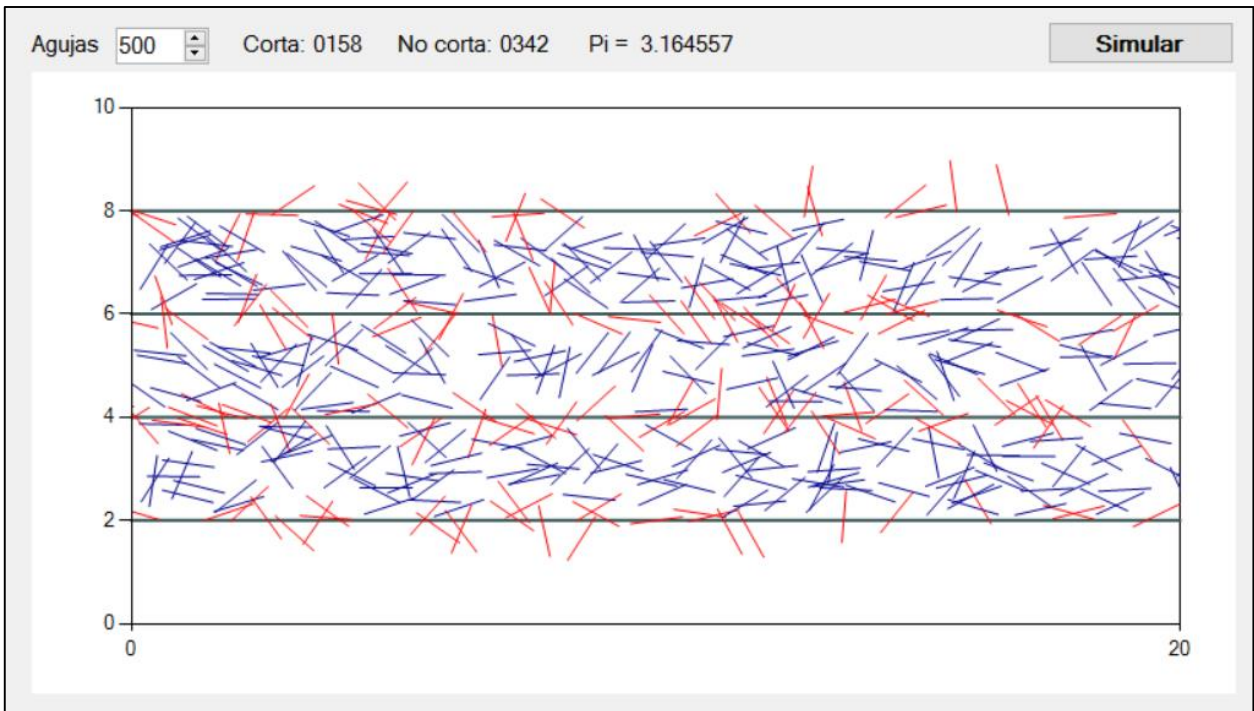


Figura 1 - Resultado gráfico de una simulación de las agujas de Buffon.

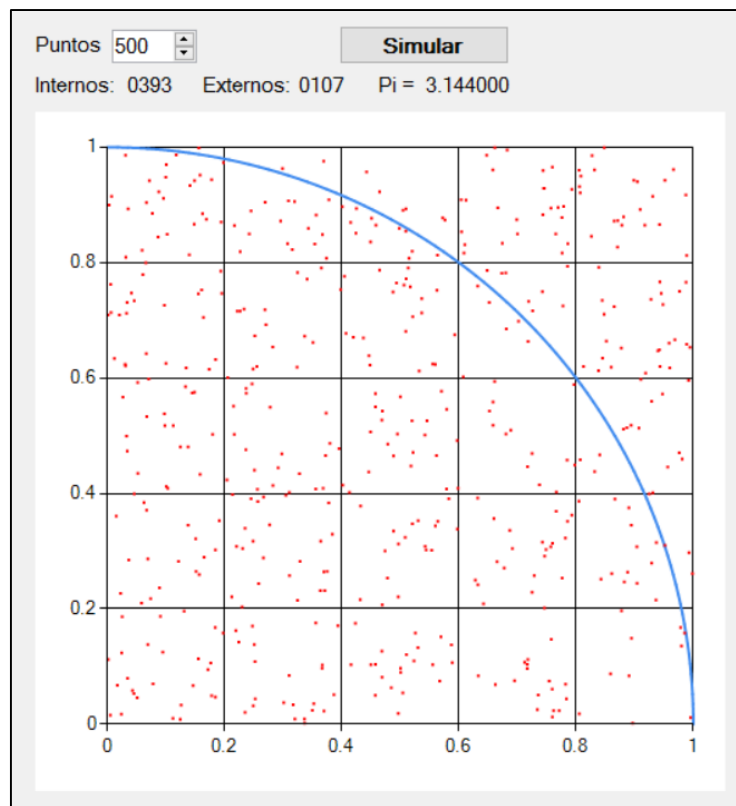


Figura 2 - Resultado gráfico de una simulación con el método de Monte Carlo.

Para el método de Monte Carlo, se muestra un gráfico con el cuadrante superior derecho de un círculo de radio 1 - ver figura 2 -, en donde se marcan los puntos posicionados al azar en el gráfico.

En este ejemplo, se contabilizan los puntos que se encuentran debajo del área formada por la curva (puntos internos) al igual que los puntos externos, que corresponden a puntos aleatorios que no se encuentran dentro del área estipulada.

En el Apéndice A se encuentra el código fuente utilizado para simular valores de muestras y calcular en valor de las estimaciones. Estos valores son los que se utilizan para calcular analíticamente la aproximación, por el método de Monte Carlo, del valor de Pi.

## Resultados y análisis

Se simularon ambos métodos con diferentes cantidades de muestras. Para un determinado tamaño de muestra, la simulación se ejecutó 50 veces, y se tomaron los promedios de la estimación en cada caso.

En la Tabla 1 se muestran los resultados de las simulaciones, ordenados por el tamaño de la muestra:

| Muestra | Buffon          | Diferencia Pi | Monte Carlo     | Diferencia Pi |
|---------|-----------------|---------------|-----------------|---------------|
| 100     | <b>3.154195</b> | 0.012603      | <b>3.164000</b> | -0.022408     |
| 500     | <b>3.168686</b> | 0.027094      | <b>3.161920</b> | -0.020328     |
| 1000    | <b>3.189029</b> | 0.047437      | <b>3.143680</b> | -0.002088     |
| 5000    | <b>3.163424</b> | 0.021832      | <b>3.144736</b> | -0.003144     |
| 10000   | <b>3.155944</b> | -0.014352     | <b>3.140760</b> | 0.000832      |
| 30000   | <b>3.159373</b> | -0.017781     | <b>3.141712</b> | -0.000120     |

**Tabla 1 – Valores promedio de la estimación de Pi para muestras de diferentes tamaños.**

Ambos métodos arrojan resultados similares con respecto al tamaño de la muestra que se utilice. Incluso cuando la muestra es relativamente chica, las estimaciones de Pi logran resultados exactos hasta el primer dígito decimal, y resultados cercanos al exacto en el segundo dígito.

En la Tabla 1, pueden observarse los diferentes valores de muestra que se utilizaron y los respectivos valores obtenidos, para ambas simulaciones. Como es de esperar, a medida que el tamaño de la muestra aumenta, los resultados mejoran.

Analizando los resultados de las simulaciones individuales (ver Apéndice B), también se observa que cuanto más grande es la muestra, la distancia entre los resultados extremos mayor y menor de las simulaciones comienza a disminuir. Esa menor variabilidad significa que, en caso de que se realice una sola simulación, será conveniente tomar una muestra lo más grande posible, para asegurarse que el resultado no se alejará demasiado del valor real de Pi, o en todo caso, será necesario definir un intervalo de confianza, para poder calcular el tamaño estadísticamente el número exacto de la muestra a elegir.

## **Conclusiones**

Luego de modelar los sistemas, utilizando para ellos un lenguaje de programación visual, se logró aproximar el valor de Pi mediante el método de las agujas de Buffon y el método de Monte Carlo.

El proceso para obtener estos resultados, los cuales fueron registrados en las tablas correspondientes, consistió en:

- Planteo de los Modelos
- Programación de los modelos (codificación en lenguaje visual)
- Ejecución de Experimentos (se ejecutaron múltiples simulaciones)
- Análisis de Resultados.

La conclusión más importante a la que se puede arribar, es que para que las aproximaciones sean buenas, se debe usar una muestra con tamaño 100 como mínimo, y que a medida que se aumenta el tamaño de la muestra, los resultados mejoran. Es decir, cuanto más grande sea la muestra, mejor serán los resultados obtenidos.

## Apéndice A – Código Fuente

Para programar la aplicación, se usó el lenguaje C# versión 5

*Código C# para el método de Buffon:*

Por comodidad, se define una clase que representa a una aguja posicionada en un plano:

```
public class Aguja
{
    public double X1 { get; set; }
    public double X2 { get; set; }
    public double Y1 { get; set; }
    public double Y2 { get; set; }
    public bool Corte { get; set; }
}
```

Luego se define una clase que representa al método de Buffon, donde se generan agujas y se lleva un registro de la cantidad generada, y cuántas de ellas cortan a alguno de las líneas, ya que solo esos 2 datos serán suficientes para calcular la estimación de Pi:

```
public class Buffon
{
    private double _cortes = 0;
    private double _agujas = 0;
    private Random _random;
    ...
}
```

Dentro de la clase Buffon, se define código para generar agujas:



```

private Aguja GenerarAguja()
{
    var largoAguja = 1;
    var aguja = new Aguja() { Corte = false };
    var minY = 2;
    var maxY = 8;
    var maxX = 20;

    // Coordenada y1 al azar entre Y mínimo y máximo.
    aguja.Y1 = _random.NextDouble() * (maxY - minY) + minY;
    // Coordenada x1 al azar entre X mínimo y máximo.
    aguja.X1 = _random.NextDouble() * maxX;
    // Coordenada y2 al azar entre y1 ± largo aguja.
    // y2 se posiciona aleatoriamente arriba o abajo de y1.
    aguja.Y2 = aguja.Y1 + largoAguja*_random.NextDouble()*Signo();
    // Coordenada x2 determinada por las demás coordenadas, usando Pitágoras.
    // x2 se posiciona aleatoriamente a la izquierda o a la derecha de x1.
    aguja.X2= aguja.X1+Math.Sqrt(largoAguja*largoAguja-(aguja.Y2-aguja.Y1)*
        (aguja.Y2-aguja.Y1))*Signo();
    // Para cada línea, determinar si la aguja la corta.
    for (var linea = 2; linea <= 8; linea += 2)
    {
        if (aguja.Y2 > aguja.Y1)
        {
            // Si la aguja corta la línea
            if (aguja.Y2 >= linea && aguja.Y1 <= linea)
            {
                aguja.Corte = true;
                break;
            }
        }
    }
}

```

```
    }  
    else  
    {  
        // Si la aguja corta la línea  
        if (aguja.Y1 >= linea && aguja.Y2 <= linea)  
        {  
            aguja.Corte = true;  
            break;  
        }  
    }  
}  
return aguja;  
}
```

Función auxiliar para generar 1 o -1 de manera aleatoria:

```
private int Signo()  
{  
    return (_random.NextDouble() < 0.5 ? 1 : -1);  
}
```

Luego de ejecutar n simulaciones, se calcula la estimación de Pi, utilizando la Fórmula 8:

```
public double CalcularPi()  
{  
    return _cortes > 0 ? _agujas / _cortes : 0;  
}
```

Código C# para el método de Monte Carlo:

Por comodidad, se define una clase que representa a un punto posicionado en entre los límites 0 y 1 de ambos ejes:

```
public class Punto
{
    public double X { get; set; }
    public double Y { get; set; }
    public bool Interior { get; set; }
}
```

Luego se define una clase que representa al método de Monte Carlo, donde se generan puntos y se lleva un registro de la cantidad de puntos internos y externos al círculo unitario, ya que solo esos 2 datos serán suficientes para calcular la estimación de Pi:

```
public class MonteCarlo
{
    private int _puntosInternos = 0;
    private int _puntosExternos = 0;
    private Random _random;
    ...
}
```

Dentro de la clase MonteCarlo, se define código para generar puntos:

```
private Punto GenerarPunto()
```

```
{  
  
    var punto = new Punto();  
  
    // Coordenada x entre 0 y 1.  
    punto.X = _random.NextDouble();  
  
    // Coordenada y entre 0 y 1.  
    punto.Y = _random.NextDouble();  
  
    var hipotenusa = Math.Sqrt(punto.X * punto.X + punto.Y * punto.Y);  
  
    // Punto interno del círculo con radio 1.  
    if (hipotenusa < 1.0)  
    {  
        _puntosInternos++;  
        punto.Interior = true;  
    }  
    else  
    {  
        _puntosExternos++;  
        punto.Interior = false;  
    }  
    return punto;  
}
```

Luego de ejecutar n simulaciones, se calcula la estimación de Pi, utilizando la fórmula 5:

```
public double CalcularPi()  
{  
    Var puntosTotales = _puntosExternos + _puntosInternos;  
    return (puntosTotales > 0) ? 4.0 * _puntosInternos / puntosTotales : 0;  
}
```

**Apéndice B – Resultados de todas las simulaciones**

| Muestra | Buffon |        |          | Montecarlo |        |      |
|---------|--------|--------|----------|------------|--------|------|
|         | Corte  | Agujas | Pi       | Internos   | Puntos | Pi   |
| 100     | 43     | 100    | 2.325581 | 69         | 100    | 2.76 |
| 100     | 43     | 100    | 2.325581 | 69         | 100    | 2.76 |
| 100     | 40     | 100    | 2.500000 | 70         | 100    | 2.80 |
| 100     | 39     | 100    | 2.564103 | 72         | 100    | 2.88 |
| 100     | 39     | 100    | 2.564103 | 72         | 100    | 2.88 |
| 100     | 39     | 100    | 2.564103 | 73         | 100    | 2.92 |
| 100     | 38     | 100    | 2.631579 | 73         | 100    | 2.92 |
| 100     | 38     | 100    | 2.631579 | 73         | 100    | 2.92 |
| 100     | 38     | 100    | 2.631579 | 73         | 100    | 2.92 |
| 100     | 38     | 100    | 2.631579 | 74         | 100    | 2.96 |
| 100     | 37     | 100    | 2.702703 | 74         | 100    | 2.96 |
| 100     | 36     | 100    | 2.777778 | 75         | 100    | 3.00 |
| 100     | 35     | 100    | 2.857143 | 75         | 100    | 3.00 |
| 100     | 35     | 100    | 2.857143 | 76         | 100    | 3.04 |
| 100     | 34     | 100    | 2.941176 | 76         | 100    | 3.04 |
| 100     | 34     | 100    | 2.941176 | 76         | 100    | 3.04 |
| 100     | 34     | 100    | 2.941176 | 76         | 100    | 3.04 |
| 100     | 34     | 100    | 2.941176 | 77         | 100    | 3.08 |
| 100     | 34     | 100    | 2.941176 | 78         | 100    | 3.12 |
| 100     | 34     | 100    | 2.941176 | 78         | 100    | 3.12 |
| 100     | 33     | 100    | 3.030303 | 78         | 100    | 3.12 |
| 100     | 33     | 100    | 3.030303 | 78         | 100    | 3.12 |
| 100     | 33     | 100    | 3.030303 | 79         | 100    | 3.16 |
| 100     | 33     | 100    | 3.030303 | 79         | 100    | 3.16 |
| 100     | 32     | 100    | 3.125000 | 79         | 100    | 3.16 |
| 100     | 32     | 100    | 3.125000 | 79         | 100    | 3.16 |
| 100     | 32     | 100    | 3.125000 | 79         | 100    | 3.16 |
| 100     | 32     | 100    | 3.125000 | 80         | 100    | 3.20 |
| 100     | 31     | 100    | 3.225806 | 80         | 100    | 3.20 |
| 100     | 31     | 100    | 3.225806 | 80         | 100    | 3.20 |
| 100     | 31     | 100    | 3.225806 | 80         | 100    | 3.20 |
| 100     | 31     | 100    | 3.225806 | 80         | 100    | 3.20 |
| 100     | 31     | 100    | 3.225806 | 80         | 100    | 3.20 |
| 100     | 30     | 100    | 3.333333 | 82         | 100    | 3.28 |
| 100     | 30     | 100    | 3.333333 | 82         | 100    | 3.28 |
| 100     | 30     | 100    | 3.333333 | 82         | 100    | 3.28 |
| 100     | 30     | 100    | 3.333333 | 82         | 100    | 3.28 |
| 100     | 29     | 100    | 3.448276 | 82         | 100    | 3.28 |
| 100     | 29     | 100    | 3.448276 | 84         | 100    | 3.36 |
| 100     | 29     | 100    | 3.448276 | 84         | 100    | 3.36 |
| 100     | 28     | 100    | 3.571429 | 84         | 100    | 3.36 |
| 100     | 28     | 100    | 3.571429 | 85         | 100    | 3.40 |
| 100     | 27     | 100    | 3.703704 | 85         | 100    | 3.40 |
| 100     | 27     | 100    | 3.703704 | 85         | 100    | 3.40 |
| 100     | 26     | 100    | 3.846154 | 85         | 100    | 3.40 |
| 100     | 26     | 100    | 3.846154 | 86         | 100    | 3.44 |
| 100     | 26     | 100    | 3.846154 | 86         | 100    | 3.44 |
| 100     | 26     | 100    | 3.846154 | 86         | 100    | 3.44 |
| 100     | 26     | 100    | 3.846154 | 87         | 100    | 3.48 |
| 100     | 24     | 100    | 4.166667 | 88         | 100    | 3.52 |
| 100     | 23     | 100    | 4.347826 | 90         | 100    | 3.60 |

**Tabla A1.1 – Resultados de las simulaciones para muestras de tamaño 100.**

| Muestra | Buffon |        |          | Montecarlo |        |       |
|---------|--------|--------|----------|------------|--------|-------|
|         | Corte  | Agujas | Pi       | Internos   | Puntos | Pi    |
| 500     | 177    | 500    | 2.824859 | 380        | 500    | 3.04  |
| 500     | 177    | 500    | 2.824859 | 382        | 500    | 3.056 |
| 500     | 176    | 500    | 2.840909 | 383        | 500    | 3.064 |
| 500     | 171    | 500    | 2.923977 | 384        | 500    | 3.072 |
| 500     | 169    | 500    | 2.958580 | 384        | 500    | 3.072 |
| 500     | 169    | 500    | 2.958580 | 384        | 500    | 3.072 |
| 500     | 169    | 500    | 2.958580 | 386        | 500    | 3.088 |
| 500     | 169    | 500    | 2.958580 | 387        | 500    | 3.096 |
| 500     | 168    | 500    | 2.976190 | 388        | 500    | 3.104 |
| 500     | 167    | 500    | 2.994012 | 389        | 500    | 3.112 |
| 500     | 166    | 500    | 3.012048 | 389        | 500    | 3.112 |
| 500     | 166    | 500    | 3.012048 | 390        | 500    | 3.12  |
| 500     | 165    | 500    | 3.030303 | 390        | 500    | 3.12  |
| 500     | 164    | 500    | 3.048780 | 391        | 500    | 3.128 |
| 500     | 164    | 500    | 3.048780 | 391        | 500    | 3.128 |
| 500     | 163    | 500    | 3.067485 | 392        | 500    | 3.136 |
| 500     | 163    | 500    | 3.067485 | 392        | 500    | 3.136 |
| 500     | 162    | 500    | 3.086420 | 393        | 500    | 3.144 |
| 500     | 161    | 500    | 3.105590 | 393        | 500    | 3.144 |
| 500     | 160    | 500    | 3.125000 | 393        | 500    | 3.144 |
| 500     | 159    | 500    | 3.144654 | 393        | 500    | 3.144 |
| 500     | 159    | 500    | 3.144654 | 393        | 500    | 3.144 |
| 500     | 159    | 500    | 3.144654 | 394        | 500    | 3.152 |
| 500     | 159    | 500    | 3.144654 | 394        | 500    | 3.152 |
| 500     | 158    | 500    | 3.164557 | 395        | 500    | 3.16  |
| 500     | 158    | 500    | 3.164557 | 395        | 500    | 3.16  |
| 500     | 158    | 500    | 3.164557 | 395        | 500    | 3.16  |
| 500     | 157    | 500    | 3.184713 | 396        | 500    | 3.168 |
| 500     | 157    | 500    | 3.184713 | 399        | 500    | 3.192 |
| 500     | 156    | 500    | 3.205128 | 399        | 500    | 3.192 |
| 500     | 156    | 500    | 3.205128 | 399        | 500    | 3.192 |
| 500     | 155    | 500    | 3.225806 | 399        | 500    | 3.192 |
| 500     | 155    | 500    | 3.225806 | 399        | 500    | 3.192 |
| 500     | 154    | 500    | 3.246753 | 400        | 500    | 3.2   |
| 500     | 154    | 500    | 3.246753 | 400        | 500    | 3.2   |
| 500     | 153    | 500    | 3.267974 | 400        | 500    | 3.2   |
| 500     | 153    | 500    | 3.267974 | 400        | 500    | 3.2   |
| 500     | 151    | 500    | 3.311258 | 400        | 500    | 3.2   |
| 500     | 151    | 500    | 3.311258 | 401        | 500    | 3.208 |
| 500     | 151    | 500    | 3.311258 | 401        | 500    | 3.208 |
| 500     | 150    | 500    | 3.333333 | 401        | 500    | 3.208 |
| 500     | 150    | 500    | 3.333333 | 401        | 500    | 3.208 |
| 500     | 149    | 500    | 3.355705 | 401        | 500    | 3.208 |
| 500     | 148    | 500    | 3.378378 | 403        | 500    | 3.224 |
| 500     | 148    | 500    | 3.378378 | 404        | 500    | 3.232 |
| 500     | 147    | 500    | 3.401361 | 404        | 500    | 3.232 |
| 500     | 147    | 500    | 3.401361 | 408        | 500    | 3.264 |
| 500     | 146    | 500    | 3.424658 | 409        | 500    | 3.272 |
| 500     | 142    | 500    | 3.521127 | 409        | 500    | 3.272 |
| 500     | 131    | 500    | 3.816794 | 409        | 500    | 3.272 |

Tabla A1.2 - Resultados de las simulaciones para muestras de tamaño 500.

| Muestra | Buffon |        |          | Montecarlo |        |       |
|---------|--------|--------|----------|------------|--------|-------|
|         | Corte  | Agujas | Pi       | Internos   | Puntos | Pi    |
| 1000    | 357    | 1000   | 2.801120 | 760        | 1000   | 3.04  |
| 1000    | 342    | 1000   | 2.923977 | 761        | 1000   | 3.044 |
| 1000    | 341    | 1000   | 2.932551 | 762        | 1000   | 3.048 |
| 1000    | 338    | 1000   | 2.958580 | 763        | 1000   | 3.052 |
| 1000    | 332    | 1000   | 3.012048 | 768        | 1000   | 3.072 |
| 1000    | 331    | 1000   | 3.021148 | 768        | 1000   | 3.072 |
| 1000    | 330    | 1000   | 3.030303 | 770        | 1000   | 3.08  |
| 1000    | 329    | 1000   | 3.039514 | 770        | 1000   | 3.08  |
| 1000    | 328    | 1000   | 3.048780 | 773        | 1000   | 3.092 |
| 1000    | 328    | 1000   | 3.048780 | 774        | 1000   | 3.096 |
| 1000    | 327    | 1000   | 3.058104 | 775        | 1000   | 3.1   |
| 1000    | 326    | 1000   | 3.067485 | 776        | 1000   | 3.104 |
| 1000    | 325    | 1000   | 3.076923 | 776        | 1000   | 3.104 |
| 1000    | 324    | 1000   | 3.086420 | 777        | 1000   | 3.108 |
| 1000    | 323    | 1000   | 3.095975 | 778        | 1000   | 3.112 |
| 1000    | 323    | 1000   | 3.095975 | 780        | 1000   | 3.12  |
| 1000    | 320    | 1000   | 3.125000 | 782        | 1000   | 3.128 |
| 1000    | 319    | 1000   | 3.134796 | 783        | 1000   | 3.132 |
| 1000    | 317    | 1000   | 3.154574 | 785        | 1000   | 3.14  |
| 1000    | 316    | 1000   | 3.164557 | 785        | 1000   | 3.14  |
| 1000    | 316    | 1000   | 3.164557 | 785        | 1000   | 3.14  |
| 1000    | 315    | 1000   | 3.174603 | 786        | 1000   | 3.144 |
| 1000    | 314    | 1000   | 3.184713 | 787        | 1000   | 3.148 |
| 1000    | 314    | 1000   | 3.184713 | 787        | 1000   | 3.148 |
| 1000    | 313    | 1000   | 3.194888 | 787        | 1000   | 3.148 |
| 1000    | 312    | 1000   | 3.205128 | 787        | 1000   | 3.148 |
| 1000    | 312    | 1000   | 3.205128 | 788        | 1000   | 3.152 |
| 1000    | 312    | 1000   | 3.205128 | 788        | 1000   | 3.152 |
| 1000    | 312    | 1000   | 3.205128 | 789        | 1000   | 3.156 |
| 1000    | 312    | 1000   | 3.205128 | 789        | 1000   | 3.156 |
| 1000    | 311    | 1000   | 3.215434 | 791        | 1000   | 3.164 |
| 1000    | 310    | 1000   | 3.225806 | 791        | 1000   | 3.164 |
| 1000    | 310    | 1000   | 3.225806 | 791        | 1000   | 3.164 |
| 1000    | 310    | 1000   | 3.225806 | 792        | 1000   | 3.168 |
| 1000    | 309    | 1000   | 3.236246 | 792        | 1000   | 3.168 |
| 1000    | 308    | 1000   | 3.246753 | 793        | 1000   | 3.172 |
| 1000    | 308    | 1000   | 3.246753 | 793        | 1000   | 3.172 |
| 1000    | 307    | 1000   | 3.257329 | 794        | 1000   | 3.176 |
| 1000    | 306    | 1000   | 3.267974 | 795        | 1000   | 3.18  |
| 1000    | 305    | 1000   | 3.278689 | 795        | 1000   | 3.18  |
| 1000    | 304    | 1000   | 3.289474 | 795        | 1000   | 3.18  |
| 1000    | 300    | 1000   | 3.333333 | 796        | 1000   | 3.184 |
| 1000    | 298    | 1000   | 3.355705 | 797        | 1000   | 3.188 |
| 1000    | 296    | 1000   | 3.378378 | 799        | 1000   | 3.196 |
| 1000    | 294    | 1000   | 3.401361 | 801        | 1000   | 3.204 |
| 1000    | 292    | 1000   | 3.424658 | 801        | 1000   | 3.204 |
| 1000    | 288    | 1000   | 3.472222 | 803        | 1000   | 3.212 |
| 1000    | 286    | 1000   | 3.496503 | 808        | 1000   | 3.232 |
| 1000    | 285    | 1000   | 3.508772 | 808        | 1000   | 3.232 |
| 1000    | 281    | 1000   | 3.558719 | 822        | 1000   | 3.288 |

Tabla A1.3 – Resultados de las simulaciones para muestras de tamaño 1000.

| Muestra | Buffon |        |          | Montecarlo |        |        |
|---------|--------|--------|----------|------------|--------|--------|
|         | Corte  | Agujas | Pi       | Internos   | Puntos | Pi     |
| 5000    | 1674   | 5000   | 2.986858 | 3864       | 1136   | 3.0912 |
| 5000    | 1655   | 5000   | 3.021148 | 3871       | 1129   | 3.0968 |
| 5000    | 1630   | 5000   | 3.067485 | 3884       | 1116   | 3.1072 |
| 5000    | 1625   | 5000   | 3.076923 | 3885       | 1115   | 3.1080 |
| 5000    | 1615   | 5000   | 3.095975 | 3885       | 1115   | 3.1080 |
| 5000    | 1614   | 5000   | 3.097893 | 3886       | 1114   | 3.1088 |
| 5000    | 1612   | 5000   | 3.101737 | 3890       | 1110   | 3.1120 |
| 5000    | 1609   | 5000   | 3.107520 | 3892       | 1108   | 3.1136 |
| 5000    | 1607   | 5000   | 3.111388 | 3896       | 1104   | 3.1168 |
| 5000    | 1607   | 5000   | 3.111388 | 3897       | 1103   | 3.1176 |
| 5000    | 1605   | 5000   | 3.115265 | 3899       | 1101   | 3.1192 |
| 5000    | 1601   | 5000   | 3.123048 | 3901       | 1099   | 3.1208 |
| 5000    | 1600   | 5000   | 3.125000 | 3903       | 1097   | 3.1224 |
| 5000    | 1600   | 5000   | 3.125000 | 3904       | 1096   | 3.1232 |
| 5000    | 1598   | 5000   | 3.128911 | 3906       | 1094   | 3.1248 |
| 5000    | 1597   | 5000   | 3.130870 | 3910       | 1090   | 3.1280 |
| 5000    | 1597   | 5000   | 3.130870 | 3910       | 1090   | 3.1280 |
| 5000    | 1593   | 5000   | 3.138732 | 3914       | 1086   | 3.1312 |
| 5000    | 1592   | 5000   | 3.140704 | 3914       | 1086   | 3.1312 |
| 5000    | 1589   | 5000   | 3.146633 | 3916       | 1084   | 3.1328 |
| 5000    | 1586   | 5000   | 3.152585 | 3922       | 1078   | 3.1376 |
| 5000    | 1585   | 5000   | 3.154574 | 3924       | 1076   | 3.1392 |
| 5000    | 1585   | 5000   | 3.154574 | 3926       | 1074   | 3.1408 |
| 5000    | 1584   | 5000   | 3.156566 | 3926       | 1074   | 3.1408 |
| 5000    | 1583   | 5000   | 3.158560 | 3928       | 1072   | 3.1424 |
| 5000    | 1583   | 5000   | 3.158560 | 3933       | 1067   | 3.1464 |
| 5000    | 1580   | 5000   | 3.164557 | 3933       | 1067   | 3.1464 |
| 5000    | 1577   | 5000   | 3.170577 | 3942       | 1058   | 3.1536 |
| 5000    | 1574   | 5000   | 3.176620 | 3943       | 1057   | 3.1544 |
| 5000    | 1573   | 5000   | 3.178640 | 3944       | 1056   | 3.1552 |
| 5000    | 1573   | 5000   | 3.178640 | 3946       | 1054   | 3.1568 |
| 5000    | 1571   | 5000   | 3.182686 | 3947       | 1053   | 3.1576 |
| 5000    | 1571   | 5000   | 3.182686 | 3951       | 1049   | 3.1608 |
| 5000    | 1571   | 5000   | 3.182686 | 3952       | 1048   | 3.1616 |
| 5000    | 1571   | 5000   | 3.182686 | 3953       | 1047   | 3.1624 |
| 5000    | 1570   | 5000   | 3.184713 | 3954       | 1046   | 3.1632 |
| 5000    | 1568   | 5000   | 3.188776 | 3957       | 1043   | 3.1656 |
| 5000    | 1568   | 5000   | 3.188776 | 3957       | 1043   | 3.1656 |
| 5000    | 1567   | 5000   | 3.190810 | 3958       | 1042   | 3.1664 |
| 5000    | 1560   | 5000   | 3.205128 | 3960       | 1040   | 3.1680 |
| 5000    | 1560   | 5000   | 3.205128 | 3960       | 1040   | 3.1680 |
| 5000    | 1559   | 5000   | 3.207184 | 3963       | 1037   | 3.1704 |
| 5000    | 1556   | 5000   | 3.213368 | 3963       | 1037   | 3.1704 |
| 5000    | 1535   | 5000   | 3.257329 | 3970       | 1030   | 3.1760 |
| 5000    | 1532   | 5000   | 3.263708 | 3971       | 1029   | 3.1768 |
| 5000    | 1529   | 5000   | 3.270111 | 3972       | 1028   | 3.1776 |
| 5000    | 1527   | 5000   | 3.274394 | 3975       | 1025   | 3.1800 |
| 5000    | 1519   | 5000   | 3.291639 | 3977       | 1023   | 3.1816 |
| 5000    | 1513   | 5000   | 3.304693 | 3987       | 1013   | 3.1896 |
| 5000    | 1512   | 5000   | 3.306878 | 4025       | 975    | 3.2200 |

Tabla A1.4 – Resultados de las simulaciones para muestras de tamaño 5000.



| Muestra | Buffon |        |          | Montecarlo |        |        |
|---------|--------|--------|----------|------------|--------|--------|
|         | Corte  | Agujas | Pi       | Internos   | Puntos | Pi     |
| 10000   | 3252   | 10000  | 3.075031 | 7771       | 10000  | 3.1084 |
| 10000   | 3250   | 10000  | 3.076923 | 7772       | 10000  | 3.1088 |
| 10000   | 3245   | 10000  | 3.081664 | 7795       | 10000  | 3.118  |
| 10000   | 3235   | 10000  | 3.09119  | 7796       | 10000  | 3.1184 |
| 10000   | 3227   | 10000  | 3.098853 | 7799       | 10000  | 3.1196 |
| 10000   | 3226   | 10000  | 3.099814 | 7801       | 10000  | 3.1204 |
| 10000   | 3219   | 10000  | 3.106555 | 7803       | 10000  | 3.1212 |
| 10000   | 3218   | 10000  | 3.10752  | 7803       | 10000  | 3.1212 |
| 10000   | 3217   | 10000  | 3.108486 | 7803       | 10000  | 3.1212 |
| 10000   | 3213   | 10000  | 3.112356 | 7809       | 10000  | 3.1236 |
| 10000   | 3213   | 10000  | 3.112356 | 7809       | 10000  | 3.1236 |
| 10000   | 3204   | 10000  | 3.121099 | 7810       | 10000  | 3.124  |
| 10000   | 3204   | 10000  | 3.121099 | 7815       | 10000  | 3.126  |
| 10000   | 3201   | 10000  | 3.124024 | 7824       | 10000  | 3.1296 |
| 10000   | 3200   | 10000  | 3.125    | 7826       | 10000  | 3.1304 |
| 10000   | 3200   | 10000  | 3.125    | 7830       | 10000  | 3.132  |
| 10000   | 3197   | 10000  | 3.127932 | 7831       | 10000  | 3.1324 |
| 10000   | 3187   | 10000  | 3.137747 | 7834       | 10000  | 3.1336 |
| 10000   | 3186   | 10000  | 3.138732 | 7834       | 10000  | 3.1336 |
| 10000   | 3186   | 10000  | 3.138732 | 7836       | 10000  | 3.1344 |
| 10000   | 3181   | 10000  | 3.143666 | 7836       | 10000  | 3.1344 |
| 10000   | 3180   | 10000  | 3.144654 | 7842       | 10000  | 3.1368 |
| 10000   | 3179   | 10000  | 3.145643 | 7844       | 10000  | 3.1376 |
| 10000   | 3179   | 10000  | 3.145643 | 7847       | 10000  | 3.1388 |
| 10000   | 3178   | 10000  | 3.146633 | 7849       | 10000  | 3.1396 |
| 10000   | 3169   | 10000  | 3.15557  | 7852       | 10000  | 3.1408 |
| 10000   | 3165   | 10000  | 3.159558 | 7853       | 10000  | 3.1412 |
| 10000   | 3160   | 10000  | 3.164557 | 7860       | 10000  | 3.144  |
| 10000   | 3158   | 10000  | 3.166561 | 7861       | 10000  | 3.1444 |
| 10000   | 3155   | 10000  | 3.169572 | 7862       | 10000  | 3.1448 |
| 10000   | 3152   | 10000  | 3.172589 | 7864       | 10000  | 3.1456 |
| 10000   | 3150   | 10000  | 3.174603 | 7865       | 10000  | 3.146  |
| 10000   | 3148   | 10000  | 3.17662  | 7873       | 10000  | 3.1492 |
| 10000   | 3147   | 10000  | 3.177629 | 7877       | 10000  | 3.1508 |
| 10000   | 3144   | 10000  | 3.180662 | 7878       | 10000  | 3.1512 |
| 10000   | 3137   | 10000  | 3.187759 | 7881       | 10000  | 3.1524 |
| 10000   | 3136   | 10000  | 3.188776 | 7882       | 10000  | 3.1528 |
| 10000   | 3131   | 10000  | 3.193868 | 7890       | 10000  | 3.156  |
| 10000   | 3130   | 10000  | 3.194888 | 7892       | 10000  | 3.1568 |
| 10000   | 3128   | 10000  | 3.196931 | 7893       | 10000  | 3.1572 |
| 10000   | 3122   | 10000  | 3.203075 | 7896       | 10000  | 3.1584 |
| 10000   | 3122   | 10000  | 3.203075 | 7897       | 10000  | 3.1588 |
| 10000   | 3122   | 10000  | 3.203075 | 7898       | 10000  | 3.1592 |
| 10000   | 3120   | 10000  | 3.205128 | 7900       | 10000  | 3.16   |
| 10000   | 3106   | 10000  | 3.219575 | 7906       | 10000  | 3.1624 |
| 10000   | 3102   | 10000  | 3.223727 | 7908       | 10000  | 3.1632 |
| 10000   | 3101   | 10000  | 3.224766 | 7910       | 10000  | 3.164  |
| 10000   | 3096   | 10000  | 3.229974 | 7918       | 10000  | 3.1672 |
| 10000   | 3092   | 10000  | 3.234153 | 7924       | 10000  | 3.1696 |
| 10000   | 3092   | 10000  | 3.234153 | 7936       | 10000  | 3.1744 |

Tabla A1.5 - Resultados de las simulaciones para muestras de tamaño 10000.

| Muestra | Buffon |        |          | Montecarlo |        |          |
|---------|--------|--------|----------|------------|--------|----------|
|         | Corte  | Agujas | Pi       | Internos   | Puntos | Pi       |
| 30000   | 9726   | 30000  | 3.084516 | 23432      | 30000  | 3.124267 |
| 30000   | 9656   | 30000  | 3.106877 | 23453      | 30000  | 3.127067 |
| 30000   | 9637   | 30000  | 3.113002 | 23454      | 30000  | 3.127200 |
| 30000   | 9633   | 30000  | 3.114295 | 23457      | 30000  | 3.127600 |
| 30000   | 9625   | 30000  | 3.116883 | 23470      | 30000  | 3.129333 |
| 30000   | 9612   | 30000  | 3.121099 | 23471      | 30000  | 3.129467 |
| 30000   | 9599   | 30000  | 3.125326 | 23478      | 30000  | 3.130400 |
| 30000   | 9592   | 30000  | 3.127606 | 23489      | 30000  | 3.131867 |
| 30000   | 9575   | 30000  | 3.133159 | 23493      | 30000  | 3.132400 |
| 30000   | 9561   | 30000  | 3.137747 | 23501      | 30000  | 3.133467 |
| 30000   | 9559   | 30000  | 3.138404 | 23507      | 30000  | 3.134267 |
| 30000   | 9559   | 30000  | 3.138404 | 23509      | 30000  | 3.134533 |
| 30000   | 9552   | 30000  | 3.140704 | 23517      | 30000  | 3.135600 |
| 30000   | 9546   | 30000  | 3.142678 | 23526      | 30000  | 3.136800 |
| 30000   | 9543   | 30000  | 3.143666 | 23530      | 30000  | 3.137333 |
| 30000   | 9538   | 30000  | 3.145313 | 23532      | 30000  | 3.137600 |
| 30000   | 9533   | 30000  | 3.146963 | 23533      | 30000  | 3.137733 |
| 30000   | 9532   | 30000  | 3.147293 | 23536      | 30000  | 3.138133 |
| 30000   | 9529   | 30000  | 3.148284 | 23537      | 30000  | 3.138267 |
| 30000   | 9524   | 30000  | 3.149937 | 23542      | 30000  | 3.138933 |
| 30000   | 9519   | 30000  | 3.151592 | 23546      | 30000  | 3.139467 |
| 30000   | 9518   | 30000  | 3.151923 | 23553      | 30000  | 3.140400 |
| 30000   | 9514   | 30000  | 3.153248 | 23553      | 30000  | 3.140400 |
| 30000   | 9509   | 30000  | 3.154906 | 23554      | 30000  | 3.140533 |
| 30000   | 9505   | 30000  | 3.156234 | 23558      | 30000  | 3.141067 |
| 30000   | 9504   | 30000  | 3.156566 | 23568      | 30000  | 3.142400 |
| 30000   | 9494   | 30000  | 3.15989  | 23570      | 30000  | 3.142667 |
| 30000   | 9486   | 30000  | 3.162555 | 23577      | 30000  | 3.143600 |
| 30000   | 9484   | 30000  | 3.163222 | 23580      | 30000  | 3.144000 |
| 30000   | 9478   | 30000  | 3.165225 | 23580      | 30000  | 3.144000 |
| 30000   | 9476   | 30000  | 3.165893 | 23581      | 30000  | 3.144133 |
| 30000   | 9466   | 30000  | 3.169237 | 23585      | 30000  | 3.144667 |
| 30000   | 9462   | 30000  | 3.170577 | 23589      | 30000  | 3.145200 |
| 30000   | 9458   | 30000  | 3.171918 | 23589      | 30000  | 3.145200 |
| 30000   | 9453   | 30000  | 3.173596 | 23592      | 30000  | 3.145600 |
| 30000   | 9447   | 30000  | 3.175611 | 23598      | 30000  | 3.146400 |
| 30000   | 9445   | 30000  | 3.176284 | 23598      | 30000  | 3.146400 |
| 30000   | 9441   | 30000  | 3.177629 | 23599      | 30000  | 3.146533 |
| 30000   | 9438   | 30000  | 3.17864  | 23612      | 30000  | 3.148267 |
| 30000   | 9438   | 30000  | 3.17864  | 23622      | 30000  | 3.149600 |
| 30000   | 9435   | 30000  | 3.17965  | 23622      | 30000  | 3.149600 |
| 30000   | 9415   | 30000  | 3.186405 | 23630      | 30000  | 3.150667 |
| 30000   | 9414   | 30000  | 3.186743 | 23632      | 30000  | 3.150933 |
| 30000   | 9391   | 30000  | 3.194548 | 23636      | 30000  | 3.151467 |
| 30000   | 9388   | 30000  | 3.195569 | 23640      | 30000  | 3.152000 |
| 30000   | 9365   | 30000  | 3.203417 | 23652      | 30000  | 3.153600 |
| 30000   | 9358   | 30000  | 3.205813 | 23666      | 30000  | 3.155467 |
| 30000   | 9316   | 30000  | 3.220266 | 23693      | 30000  | 3.159067 |
| 30000   | 9312   | 30000  | 3.221649 | 23696      | 30000  | 3.159467 |
| 30000   | 9262   | 30000  | 3.239041 | 23704      | 30000  | 3.160533 |

Tabla A1.6 - Resultados de las simulaciones para muestras de tamaño 30000.

**Referencias**

Ackoff, Russell L. (1971) - Towards a system of systems concepts – p. 662

Arcil Javier y Gordillo Francisco (1997) - Dinámica de Sistemas - pp. 11-12

Azarang, Mohammad R. (1998) - Simulación y análisis de modelos estocásticos - p. 8

Cheney, W. and Kincaid, D. (1985). Numerical Mathematics and Computing. 2nd Ed. Pace Grove, California: Brooks/Cole Publishing Company pp. 354-354

Shannon, Robert (1975) - Systems simulation: the art and science –