

C.E.M.A.

Virrey del Pino 3210  
Belgrano R.  
1426 Buenos Aires

TE. 552-3291/9313/7771

EL PAPEL DE LA MATEMATICA EN LA ECONOMIA  
CONTEMPORANEA.

Rolf R. Mantel  
Mayo 1985

N° 50

# EL PAPEL DE LA MATEMATICA EN LA ECONOMICA CONTEMPORANEA.

por

Rolf R. Mantel\*  
(C.E.M.A. y C.O.N.I.C.E.T.)

## SINTESIS

El presente trabajo fué preparado por el autor con motivo de su incorporación como miembro titular de la Academia Nacional de Ciencias Económicas.

Comienza por referirse al método matemático en Economía, notando los cambios producidos desde principios del Siglo XVIII hasta el presente en la apreciación del método por la generalidad de los economistas.

Se hace luego una síntesis histórica de Economía Matemática, destacando los hechos ocurridos durante las tres etapas de adaptación de técnicas de otras ciencias, de creación de técnicas nuevas, y la presente de integración del instrumental originado en las dos anteriores.

Se especializa la exposición haciendo referencia al campo particular de la Teoría del equilibrio económico general, para finalizar con una descripción de los enormes avances logrados en años recientes en materia de la aplicación de dicha Teoría a la resolución de problemas de orden práctico de determinación de medidas de política económica. Se hace referencia en especial a la conjunción de avances en el orden de la tecnología de la computación y de la matemática que permiten en el presente aplicar

el conocimiento económico al cálculo de medidas del gobierno tendientes a la mejora del bienestar de un país.

---

\* El presente trabajo es parte de la disertación pronunciada por el autor en la Academia Nacional de Ciencias Económicas, con motivo de su incorporación a la misma como miembro titular, el 4 de julio de 1984. Una versión de la presentación mencionada será publicada en los Anales de la Academia Nacional de Ciencias Económicas.

## 1. El Método Matemático.

Por alguna extraña razón, los economistas siempre han considerado que discusiones sobre la metodología de nuestra ciencia son poco fructíferas.

El creador de la escuela austríaca, Carl Menger (1840-1921), afirmó que "Los resultados científicos más importantes han sido alcanzados por hombres que no estaban interesados en problemas metodológicos" (C. Menger, 1924).

Dennis H. Robertson, comienza su discusión sobre la teoría del interés Keynesiana diciendo "comenzaré con unas pocas palabras sobre la materia desagradable de metodología" (Robertson, 1940, citado por Koopmans, 1957).

Roy F. Harrod, en su ensayo metodológico de 1938, explica que el tema usualmente aburre, en especial porque el metólogo "... critica la tarea de los demás que, cualquiera sea su valor, al menos trata de ser constructiva; se establece a si mismo como el intérprete definitivo del pasado y el dictador de esfuerzos futuros", (Harrod, 1938).

A pesar de estas apreciaciones negativas he decidido correr el riesgo de presentarles, a modo de introducción, algunas consideraciones sobre el método matemático en economía.

Desde los primeros balbuceos de Giovanni Ceva, quien en 1711 intentara presentar la teoría de la moneda en términos geométricos, y afirmaba que "para comprender los principios de las cosas debemos construir modelos racionales por medio de supuestos... y la manera correcta de tratar dichos modelos es por medio de la matemática" (Schumpeter, 1954, pág. 301), hasta nuestros días la u-

tilización de la matemática en el razonamiento económico ha sufrido enormes transformaciones.

Es evidente que, de acuerdo con las palabras del eminente economista Leonid Hurwicz (Hurwicz, 1963), "economía matemática ha 'arribado', a juzgar por el número de publicaciones técnicas, volumen de las contribuciones científicas, cursos ofrecidos, y conurrencia de alumnos". Si bien para el especialista son suficientes observaciones casuales para arribar a esta conclusión, se puede agregar la evidencia estadística de George Stigler, quien en sus "Estudios Estadísticos sobre la Historia del Pensamiento Economico" analiza la distribución porcentual de los temas de artículos económicos publicados en los Estados Unidos. "Hacia fines del siglo pasado sólo un artículo de cada veinte usaba gráficos o álgebra simple; al principio de la década de 1960 sólo a uno de cada tres artículos le basta el lenguaje de las palabras. Si la tendencia sigue, hacia el año 2.000 nuestra ciencia se habrá convertido en matemática simplemente porque los editores de las revistas especializadas no sabrán leer un trabajo no matemático..." (Stigler, 1964).

He referido en otra ocasión la reacción escandalizada de Sir Roy Harrod a la identificación que Lionel McKenzie hacía entre economía matemática y teoría económica (Mantel, 1984).

Sin embargo, si bien hay mucho lugar para tratar temas económicos sin usar matemática, el uso corriente en nuestra ciencia nos lleva a trabajar cada vez más desde el punto de vista matemático.

La historia no fue siempre de éxito. Si nos remontamos a escritos previos al último medio siglo, encontraremos quejas, a veces amargas, como las siguientes.

En 1844, leemos de Jules Dupuit sobre "... el anatema que los economistas de todos los tiempos han pronunciado contra (las ventajas de una alianza con la matemática)" (Dupuit, 1844).

León Walras en el prefacio a la cuarta edición de sus Elementos de "Economía Política Pura o Teoría de la Riqueza Social" en el año 1900 expresaba "En cuanto a aquellos economistas que no saben matemática, que ni siquiera saben qué significa la matemática y que a pesar de ello han tomado la posición de que la matemática no puede servir para elucidar principios económicos, dejadlos ir, repitiendo que "la libertad humana JAMAS permitirá ser volcada a ecuaciones" o que "la matemática ignora las fricciones que lo son TODO en la ciencia social" y otras frases de igual fuerza y ampulosidad. Ellos nunca podrán evitar que la teoría de la determinación de los precios bajo competencia libre se convierta en una teoría matemática. Por lo tanto, ellos siempre deberán encarar la alternativa o bien de mantenerse alejados de esta disciplina y en consecuencia elaborar una teoría de economía aplicada sin recurrir a una teoría de economía pura, o bien destacar los problemas de economía pura sin el equipamiento necesario, y con ello producir no sólo una muy mala economía pura sino también una muy mala matemática" (Walras, 1900).

John Maynard Keynes en su "Teoría General", editada en 1936, describía así el estado de nuestro campo: "Una proporción demasiado elevada de economía "matemática" (entre comillas en el original) reciente ha sido meramente fraguada, tan imprecisa como los supuestos iniciales sobre los que se basa, que permite a los autores perder de vista las complejidades e interdependencias del mundo real en un laberinto de símbolos pretensiosos e inútiles"

(Keynes, 1936). Como autor de un importante tratado sobre probabilidades poco se puede dudar de sus conocimientos sobre matemática.

Si bien la observación de Keynes pudo haber sido correcta hace medio siglo, hoy la situación es distinta. En el presente las dudas sobre el método matemático se deben a una interpretación errónea.

El error de apreciación de cuál es el papel de la matemática en economía no proviene solamente del campo de los no versados en matemática, ya que aún los economistas matemáticos de otras épocas tenían una concepción fundamentalmente distinta a la actual. Por ejemplo Jevons, en su "Teoría de Economía Política" publicada en 1871 afirmaba "A mi me parece que nuestra ciencia debe ser matemática, simplemente porque trata con cantidades" (citado por Roll, 1956).

De acuerdo con Hurwicz, esta inclinación hacia igualar matemática con los fenómenos cuantitativos o numéricos es muy fuerte. Pero hacer matemática no es lo mismo que emplear el método matemático, como muy bien distinguiera Irving Fisher (Hurwicz, 1963). La característica más notable de dicho método es quizá el uso de símbolos; pero es innegable que no son necesarios para la aplicación del método, como lo demuestra el caso de Marshall, quien según Manuel de Torres (1954) hacía matemática sin símbolos.

Hacer matemática tampoco es hacer cuentas. Una rápida revisión de las aplicaciones de la matemática que se han hecho a la economía permite ver que no es justamente el carácter numérico o medible de los fenómenos económicos el que más ha atraído la atención de los economistas teóricos. Si bien no es negligible este

aspecto, como lo atestigua la enorme cantidad de trabajos económétricos que emplean los resultados de la estadística matemática, basta con mirar el índice de una obra como el Manual de Economía Matemática recientemente compilado por Kenneth J. Arrow y Michael Intriligator (1981, 1982) para conocer los demás instrumentos empleados. Se hace referencia allí a topología, teoría de los conjuntos, convexidad, programación matemática, álgebra lineal, sistemas dinámicos, teoría del control óptimo determinista y estocástico, teoría de la medida, teoría de la probabilidad, juegos de estrategia, y análisis global. Cualquier persona medianamente versada en estos temas reconocerá de inmediato que el cálculo numérico no juega aquí un papel preponderante.

Esta lista nos muestra en qué dirección se han desarrollado las herramientas matemáticas más utilizadas en la economía contemporánea. Según Koopmans "...quizá las herramientas matemáticas más antiguas en economía son el ejemplo numérico y el diagrama". (Koopmans, 1957). El ejemplo numérico con el tiempo fue destituido al rol de herramienta expositiva. El diagrama es de apreciación más sencilla por lo que tienta a su empleo; pero el ojo humano no razona, y por ello es fácil introducir supuestos ocultos mediante su empleo. Además nos limita en cuanto a los problemas que se pueden analizar por no permitir la representación de más de dos o tres variables.

En los últimos cuarenta años se ha ampliado el horizonte matemático del economista. Se ha abandonado el énfasis sobre el cálculo diferencial por ser miope en su papel de indicador de posiciones



de óptimo, además de requerir la existencia de derivadas de funciones de utilidad y de producción no siempre justificables desde el punto de vista económico.

Todo esto nos mueve en la dirección de matemática más fundamental. Hoy en día el economista medio requiere un conocimiento, aunque sea a un nivel elemental, de la teoría de conjuntos, de relaciones, del campo de números reales, de funciones, de cálculo diferencial e integral, de probabilidades, de espacios lineales y álgebra matricial, y de algunos resultados de topología combinatoria y topología general.

Un tema separado es la enorme influencia del progreso tecnológico en el campo de la computación debido al fantástico avance del conocimiento en el campo de la electrónica. Los modernos equipos permiten realizar cálculos en una escala no soñada hace apenas treinta años. Es sorprendente que también aquí aparece asociado el nombre de John von Neumann, el matemático que como duende benéfico tantas veces se asoma a nuestra ciencia, como se verá un poco más tarde. Fué su genial concepción de la computadora que mantiene sus propias instrucciones en su memoria junto con los datos sobre los que debe operar la que subyace a todas las máquinas de hoy en día, con su facilidad de ejecutar millones de operaciones por segundo, actualizando no sólo la información sino tomando decisiones y alterando sus propios programas de instrucciones.

Es interesante hacer notar que los economistas ya desde los albores de nuestra ciencia estaban preocupados por la computación. Se considera como "padre espiritual" de las calculadoras automáti-

cas modernas a Charles Babbage, quien regentó la cátedra de matemática de la Universidad de Cambridge a mediados del pasado siglo, y fuera economista de nota (Schumpeter, 1954, pág. 541 nota 1). "Hacia el año 1835 lanzó el concepto de una "máquina analítica", como él decía, en la que se anticipaban algunos de los caracteres esenciales de construcción que encontramos realizados en los autómatas modernos. ...Resulta penoso que Babbage naciera con un siglo de anticipación. ...la construcción de la máquina de acuerdo con sus planes resultó un completo fracaso. Por aquel tiempo era imposible técnicamente la construcción de un dispositivo mecánico dotado de la precisión adecuada" (Gerwin, 1967, pág. 100).

No sólo es posible en la actualidad diseñar ejemplos numéricos más elaborados que en el pasado para resolver de manera experimental problemas demasiados complejos para su solución analítica, o simular la respuesta de un modelo del sistema económico a modificaciones en los niveles de los instrumentos de política económica con fines de controlarlo antes de ejecutar costosos experimentos con la economía de un país. También es viable utilizar técnicas estadísticas y econométricas más elaboradas que en el pasado para la estimación de modelos de la economía, tanto para fines explicativos como para fines predictivos. El investigador tiene hoy al alcance de su mano, no más lejos que su biblioteca de programas, los medios para efectuar análisis que hasta hace pocas décadas eran imaginables. Gracias a los adelantos en los medios de comunicación, también basados en la electrónica, tiene además la posibilidad de acceder a una enorme masa de información económica, permanentemente

actualizada. Lamentablemente estos adelantos aún no se hacen sentir mayormente en nuestro país debido a las restricciones al intercambio comercial y, en consecuencia, cultural a que son tan proclives nuestros gobiernos.

En la portada de su libro "Fundamentos del Análisis Económico", Paul A. Samuelson -- premio Nobel, uno de los más prolíficos y exitosos escritores de la economía-- reprodujo el lema del gran físico de la Universidad de Yale Willard Gibbs: "La matemática es un lenguaje" (Samuelson, 1947). Sin embargo, como lo demuestra incluso el mismo Samuelson en sus publicaciones, "...la matemática es mucho más que sólo un lenguaje. La matemática es también un poderoso instrumento para la solución de algunos problemas centrales de economía" (Hurwicz, 1963).

Este último argumento ya fué presentado por Jules Dupuit al escribir sobre la medición de la utilidad de las obras públicas en 1844, cuando afirmaba que "En cuanto uno se percata junto con J.B. Say que economía política se refiere a cantidades susceptibles de un más o un menos, también debe ser reconocido que está en el dominio de la matemática. ...No sólo nos dan los símbolos y los gráficos de la matemática cuerpo y forma a ideas abstractas, llamando con ello a los sentidos a colaborar con el poder intelectual del hombre, sino sus fórmulas se hacen cargo de dichas ideas, las modifican, las transforman, y traen a la luz todo lo que es verdadero, correcto y preciso en ellas sin forzar la mente a seguir todos los movimientos de una maquinaria cuyo curso, en cierta etapa, puede pensar por nosotros, y hay tanta ventaja en utilizarlas como hay en usar a

quellas que, en la industria, trabajan por nosotros" (Dupuit, 1844). Este párrafo, según Schumpeter, es el primer argumento y quizá uno de los mejores en su brevedad, en favor del método matemático (Schumpeter, 1954, pág. 957, nota 7).

El mismo Schumpeter nos dice que "...hay ventajas en (construir) un instrumento compuesto o máquina o sistema de análisis económico... que funcione formalmente de la misma manera, cualquiera que sea el problema económico al que podamos dirigirnos. La obra de Ricardo Cantillon es la primera en que la conciencia de esta última verdad es claramente discernible, aunque les llevó a los economistas más de un siglo efectivizar todas sus posibilidades... León Walras fué de hecho el primero en hacerlo" (Schumpeter, 1954, pág. 16).

Fué sin embargo Joan Robinson quien proporcionó la descripción más breve de esta ventaja de una teoría formalizada, al afirmar que "Teoría económica es una caja de herramientas" (Schumpeter, 1954, pág. 15).

## 2. Resumen del Desarrollo Histórico de Economía Matemática.

Habiendo justificado la importancia de la matemática para economía, permítaseme hacer una muy breve reseña del desarrollo histórico de economía matemática, para luego centrarme en uno de los campos, la teoría del equilibrio general, que me es más familiar por haber trabajado en él.

Siguiendo a Arrow e Intriligator (1981), clasificaré los pe-

ríodos históricos del desarrollo en nuestra materia en tres. El primero, el marginalista, arranca en 1938 con las "Investigaciones sobre los Principios Matemáticos de la Teoría de las Riquezas" de Cournot (1938) y termina en 1947 con la aparición de la segunda de las dos obras clásicas de este período, los "Fundamentos del Análisis Económico" de Samuelson (1947). La primera de las obras con que culmina este período fue "Valor y Capital" de Hicks (1939).

Esta primera etapa se caracterizó por la aplicación de cierto tipo de herramienta matemática a economía, en particular a teoría económica. Dicha herramienta fue el cálculo infinitesimal, con metodologías que los economistas en gran parte han tomado de otras ciencias, en especial de la física. En este período se llegó a una formulación bastante completa del sistema de equilibrio general, al que nos referiremos más tarde, con una formulación cercana a la presente de los problemas de competencia perfecta e imperfecta, monopolio, de duopolio, la teoría del consumidor y la teoría de la producción basados en los principios de maximización.

El segundo período arranca en el año 1948. Es un período muy breve, que finaliza aproximadamente en 1960. Coincide con la segunda postguerra; durante el mismo se cambió mucho el enfoque, no tanto de los problemas analizados, sino del tipo de herramientas matemáticas utilizadas. Se le puede asignar el nombre de período de teoría de los conjuntos y de modelos lineales. En este período la obra que juega un papel similar a las obras de Hicks y de Samuelson del período anterior es la "Teoría del Valor" de Debreu (1959). Hay un gran desarrollo tanto por el lado de teoría de los juegos de estrategia y sus aplicaciones al campo económico como el tratamiento de

los modelos lineales. Entre los últimos podemos citar especialmente el modelo de insumo-producto de Leontief (1941), los modelos de programación lineal iniciados con los trabajos de Dantzig (1949) y Kantorovich (1942), y el de análisis de actividades en base al trabajo pionero de Koopmans (1951). El logro fundamental de esta época es la demostración de la consistencia del modelo de equilibrio general lograda por Arrow y Debreu en 1952 (Debreu, 1952, y Arrow y Debreu, 1954).

Un tercer período en el desarrollo histórico de economía matemática arranca en 1961 y aún no finalizó. Arrow e Intriligator (1981) lo denominan período de integración del instrumental básico, el cálculo infinitesimal por un lado y teoría de los conjuntos y modelos lineales por el otro. Esta integración hoy se encuentra muy avanzada. Prácticamente ya no queda campo de la economía que no haya sido tratado en mayor o menor medida desde el punto de vista matemático.

A modo de ejemplo, una nueva y rápida revisión del índice del Manual de Arrow e Intriligator (1981, 1982) nos dará una idea de los intereses actuales de los economistas que actúan en el área. Lee-mos allí los nombres de capítulos como teoría del consumo y de la producción, estructuras de mercado, dualidad, teoría de la inversión, teoría de la demanda de mercado, existencia y estabilidad del equilibrio competitivo, economías regulares y núcleo, equilibrio temporario, equilibrio bajo incertidumbre, cálculo de precios de equilibrio, teoría de la elección social, información y el mercado, imposición óptima, óptimos secundarios, crecimiento óptimo, diseño de orga

nizaciones, incentivos y descentralización, y planificación.

### 3. Teoría del Equilibrio General.

Sirva esta breve introducción como marco de referencia para situar las investigaciones a que me referiré a continuación. Estas se encuentran en el campo más restringido de la teoría del equilibrio económico general. Veremos someramente los adelantos que se han producido, enfatizando el tema del cómputo de soluciones de equilibrio, tema al que me he dedicado durante algún tiempo.

Los orígenes de la teoría del equilibrio económico general se remontan al Tableau Economique de Quesnay, en la época anterior a Cournot que Arrow e Intriligator (1981) denominan la prehistoria de economía matemática. Le cupo a otro francés, emigrado a Suiza por no conseguir acceder a una cátedra en su país natal, desarrollar la teoría en tal esplendor, que le valiera una admiración tan incondicicional como la que demostrara Schumpeter en su monumental "Historia del Análisis Económico" (Schumpeter, 1954). Se trata de León Walras, cuya obra cumbre se publicó hace más de un siglo (Walras, 1874). En ella desarrolló el concepto fundamental de que los mercados están interrelacionados, por lo que el equilibrio de la economía está caracterizado por la igualdad simultánea entre oferta y demanda en todos los mercados. Este concepto fue extendido y expuesto posteriormente por Pareto (1896, 1909).

Walras no llegó a formar escuela. Tuvo seguidores como Aupetit en Francia, y Barone y Pantaleoni en Italia. Su sucesor Pareto en-

cabezó la escuela de Lausana, confinada principalmente a Italia. En Inglaterra, Marshall lo ignoró, y recién en la década de 1920 Bowley (1924) lo hará conocer allí. En Alemania y Austria sólo se vió en él la doctrina austríaca presentada con la tan repelente matemática. En los Estados Unidos de Norteamérica, sólo Fisher y Moore apreciaron su obra. En una publicación póstuma, Walras escribiría "si uno desea cosechar pronto, debe plantar zanahorias y lechuga; si uno tiene la ambición de plantar robles, debe tener el tino para decirse: mis nietos me deberán esta sombra" (Walras, 1939, citado por Schumpeter, 1954). Como enfatizara Schumpeter (1951), Walras elaboró su sistema "a pesar de saber, a pesar de que DEBIA haber sabido, que no podía esperar éxito o reconocimiento en su propia generación ni entre economistas ni entre matemáticos". Recién en la década de 1930, en especial gracias a la obra de Hicks (1939), comienza a valorarse plenamente su trabajo.

La admirable construcción analítica de Walras se adelantó por completo a su época. En aquel entonces poquísimos economistas tenían la preparación matemática suficiente como para poder apreciar debidamente su obra. La misma matemática estaba demasiado subdesarrollada como para que fuera posible analizar rigurosamente la consistencia de su esquema.

En un reciente artículo E. Roy Weintraub (1983) relata con detalle los eventos del período de 1930 hasta 1952 que llevaron a la demostración de la consistencia del modelo de Walras. Este publicó su magnífico sistema en 1873 en una versión preliminar (Walras, 1973), y en la primera edición de sus "Elementos de Economía Pura" (Walras,



1874), pero sus conocimientos de matemática, si bien muy superiores a los de un economista medio de la época, no fueron suficientes para dejar esclarecida la cuestión de la existencia de una solución a sus ecuaciones de equilibrio.

El gran popularizador del sistema Walrasiano en Europa de los años 1920 fué el economista sueco Gustav Cassel, con su libro de texto "Economía Social Teórica" (Cassel, 1918). A pesar de que en dicho libro no hay referencia alguna a Walras, el sistema que presenta es una simplificación del sistema productivo walrasiano, sin las ecuaciones de equilibrio del consumidor basadas en la noción de utilidad.

Su sistema productivo consideraba ciertas cantidades de factores de la producción disponibles en cada período. Los coeficientes técnicos, es decir, las cantidades de factores necesarias para producir una unidad de cada producto, eran fijos. En base a éstos y a los precios de los factores se calculaban los costos por unidad de producto, y en consecuencia los precios de los productos. Dichos precios permitían determinar las cantidades demandadas de cada mercancía en base a las funciones de demanda. La igualdad de oferta y demanda proporcionaba las cantidades producidas de los productos, y una nueva aplicación de los coeficientes técnicos de producción permitía calcular las cantidades necesarias de los factores. Una comparación de estas necesidades con los recursos disponibles permitía verificar si el sistema estaba en equilibrio, debiéndose a justar los precios de los factores en caso de discrepancia hasta lograr la igualación.

El Coloquio de Viena de Karl Menger, el matemático, hijo del fundador de la escuela austríaca, fué desde la mitad de la década de 1920 hasta la mitad de la siguiente el centro de atracción de los matemáticos de Europa.

En 1931, Menger había solicitado a Karl Schlesinger, economista y banquero húngaro, que presente su reformulación de las ecuaciones de producción de Walras y Cassel en el Coloquio. Ya Heinrich von Stackelberg (1933) y Hans Neisser (1932) habían "observado que estas ecuaciones no poseen necesariamente una solución cuyos valores son positivos, como es necesario (para los precios y cantidades producidas)" (Schlesinger, 1934). Walras y Cassel se referían a insumos productivos escasos, pero la escasez de un factor no es una propiedad inherente al mismo sino una consecuencia de las condiciones de demanda y las posibilidades técnicas de producción. En consecuencia era necesario agregar a cada una de las ecuaciones de demanda derivada de factores un término que refleje la cantidad del factor que permanece desempleada; si dicha cantidad resulta positiva reflejará el desempleo del factor, y siendo un bien libre su precio será nulo. Schlesinger (1934) cita a F. Zeuthen (1933) por un argumento similar.

En base a esta idea el rumano Abraham Wald (1934, 1936) llega a proporcionar la primera demostración rigurosa de la existencia de una solución de equilibrio competitivo en el sistema de Walras-Cassel, con la condición de que las funciones de demanda satisfagan una condición que luego recibiera el nombre de axioma de la preferencia revelada. Este supuesto esencialmente requiere que la economía se com

porte como si hubiera un sólo consumidor, razón por la que el resultado de Wald no es aplicable al sistema de Walras en su forma original, aún teniendo en cuenta las condiciones de complementariedad y nonegatividad de Schlesinger.

En este punto volvemos a encontrar el nombre de von Neumann. Nacido en Budapest en 1903, a los 24 años comenzó a enseñar en la Universidad de Berlín, después de haberse doctorado en matemática en Budapest y graduado en química en Zuerich. Al mismo tiempo escribió su artículo sobre la teoría de los juegos de estrategia (von Neumann, 1928), que marcará el comienzo de su interés por los temas económicos, tema que desarrollaría más tarde, con el economista austriaco Morgenstern, en un libro que es uno de los pilares sobre los que se basa la teoría económica contemporánea (von Neumann y Morgenstern, 1944). Es importante notar la similitud formal de la teoría de los juegos de estrategia con el problema de equilibrio económico; tanto que el mismo von Neumann explota dicha relación en 1932 en un trabajo sobre equilibrio en una economía dinámica. Habiendo aceptado una posición en el Instituto de Estudios Avanzados de la Universidad de Princeton en 1930, von Neumann sin embargo viajaba con frecuencia a Europa, donde participaba del Coloquio de Menger en Viena, de modo que tuvo contactos con los integrantes del mismo incluyendo a Wald y Schlesinger. Su estudio mencionado se publicó en el último volumen de los Anales del Coloquio (von Neumann, 1937); es posiblemente el trabajo más importante de economía matemática. De acuerdo con Tjalling Koopmans (1964, citado por Weintraub, 1983) "el ensayo contiene la primera formulación explícita de lo que pos-

teriormente ha sido llamado el modelo de análisis de actividades. ... (además su propósito principal fué) exhibir un modelo de equilibrio competitivo... (y) el ensayo contiene el primer modelo riguroso, formal, y completamente explícito en la teoría no agregada de capital". Weintraub agrega que Koopmans no lo dijo todo. "El ensayo también contiene la primera instancia del uso, hoy corriente, de ciertas herramientas: argumentos explícitos basados en dualidad, técnicas explícitas de punto fijo para una demostración de existencia, y argumentos basados en propiedades de convexos".

Para la demostración von Neumann tuvo que elaborar primero un teorema de punto fijo, generalización del teorema que Brouwer (1910) demostrara a principios de siglo. Con ello dió un primer paso en la dirección hacia una matemática propia para economía, que hasta entonces y por mucho tiempo más había adoptado las herramientas propias de otras ciencias como la física. Como la adopción de herramientas a veces también introduce formas de pensamiento propias de otra ciencia, ello en su momento contribuyó a la impopularidad de la matemática entre los economistas. Recién en el presente puede decirse que la actividad matemática de los economistas está bien encaminada.

La forma en que von Neumann modeló la economía difiere un tanto de la formulación walrasiana. Su preocupación era la de establecer la existencia del equilibrio en una economía regularmente progresiva, de modo que toda actividad económica debía ser endógena, incluyendo las disponibilidades de factores de la producción.

Von Neumann supuso que el proceso productivo transforma insu-

mos disponibles al principio del período en productos disponibles al final del mismo. Los distintos procesos productivos pueden ser operados a niveles arbitrarios, de modo que hay rendimientos constantes a escala, y no interfieren entre sí. Además incluyen el consumo de los bienes necesarios para la subsistencia de obreros y empleados.

Las condiciones de equilibrio del sistema requieren que la producción sea suficiente para cubrir los insumos del período siguiente, que bajo condiciones de expansión regular corresponden a cantidades iguales a las de los insumos del principio del período multiplicadas por el factor de expansión de la economía. Los precios de equilibrio cumplen con la condición de que los ingresos por ventas de productos de la operación de un proceso cualquiera al nivel unidad no deben exceder del valor capitalizado de los insumos utilizados para su producción. Finalmente deben cumplirse las condiciones de holgura complementaria, que exigen que si un bien es producido en exceso su precio debe ser nulo, y que si un proceso produce pérdidas no se lo utilice. Von Neumann demostró que tal solución existe, y que tiene la propiedad de que la tasa de interés coincide con la tasa de expansión de la economía.

Este trabajo, presentado en un seminario en Princeton en 1932, fue luego ampliado para ser publicado en el último volumen de los Anales del Coloquio de Menger, correspondiente a los años 1935-36. Las dificultades políticas disolvieron el grupo de Viena. Menger se radicó en los Estados Unidos de Norteamérica en 1937, con un cargo en la Universidad de Notre Dame. Los alemanes entraron en Viena en

marzo de 1938; el mismo día, Schlesinger, que ocupaba una posición prominente, se suicidó. Morgenstern, director del Instituto de la Universidad de Viena, fué destituido por ser "políticamente insufrible" y obtuvo un cargo en la Universidad de Princeton. Wald también fue alejado; luego de varias peripecias pudo llegar a Colorado Springs, donde obtuvo un puesto en la Cowles Commission que ya había incorporado a Tintner, también asociado al Instituto de Morgenstern, en 1936.

De tal manera Austria perdió no sólo a los miembros de la escuela de Viena de la segunda generación como Mises y Schumpeter, y los de la tercera generación como Haberler, Hayek, Machlup y Morgenstern -- todos fueron a los Estados Unidos excepto Hayek, quien pasó a la Escuela de Economía de Londres-- sino también a los economistas matemáticos asociados con Menger el joven, con lo que el centro de gravitación de este campo de nuestra ciencia pasó decididamente al continente americano.

Recién en 1941, Shizuo Kakutani, matemático japonés, hoy profesor en la Universidad de Yale, utilizando herramientas inventadas después de Walras, demostró el teorema de punto fijo que lleva su nombre, y que generaliza el teorema de von Neumann ya mencionado (Kakutani, 1941). Dicho teorema fué un elemento clave para los adelantos posteriores.

En base al teorema de Kakutani se demostraron varias proposiciones esenciales en la teoría de juegos de estrategia. Fundamental para nuestro tema fué la demostración de Nash (1950) de la existencia de una solución no cooperativa para juegos de  $n$  personas, ge-

neralizando la solución que Cournot ya había dado para el duopolio, extendiéndola al caso de más de dos oponentes. En base a dicho resultado, otro francés emigrado, esta vez a los Estados Unidos, Gerard Debreu, pudo demostrar finalmente en 1952 la existencia del equilibrio competitivo en el modelo de Walras (Debreu, 1952). En el mismo año, Debreu junto con Arrow presentan su trabajo común sobre existencia del equilibrio en una economía competitiva. Dicho trabajo fue publicado en 1954 (Arrow y Debreu, 1954), 80 años después de la publicación de los "Elementos de Economía Pura". Este logro coronó la serie de grandes esfuerzos de economistas y matemáticos descriptos anteriormente.

El trabajo de Arrow y Debreu, junto con los casi simultáneos de McKenzie (1955), Gale (1955), y Nikaidô (1956), han iniciado un enorme flujo de investigaciones sobre modelos cada vez más complejos, cuya característica común es el destacar la interdependencia entre las acciones de los distintos agentes de un sistema económico. Hoy en día se han analizado extensiones que incluyen características como ser la competencia imperfecta, rendimientos crecientes a escala, indivisibilidades, toda clase de externalidades, agentes cuyo comportamiento no puede expresarse como el de maximizar preferencias o beneficios, presencia de incertidumbre, desarrollo en el tiempo, racionamiento y otras imperfecciones en la formación de precios, y la actuación explícita del gobierno fijando sus instrumentos de política económica.

#### 4. Cómputo del Equilibrio Económico.

Como es de conocimiento general, Gerard Debreu ha sido galar-

donado el año pasado con el premio Nobel "por haber incorporado a la teoría económica nuevos métodos analíticos que conducen a una rigurosa reformulación de la teoría del equilibrio general". El académico sueco Assar Lindbeck, al anunciar el premio, luego de elogiar la obra de Debreu, dijo que "sus técnicas analíticas, esencialmente desmotrando matemáticamente como funcional la ley básica capitalista de la oferta y la demanda, no tienen aplicación práctica".

Deseo destacar estas últimas palabras por disentir fundamentalmente con esta afirmación. Hasta mediados de la década de 1960 una afirmación como la de Lindbeck tenía su validez porque a pesar del avance logrado, los métodos empleados para demostrar la consistencia de estas distintas versiones del modelo de equilibrio económico general --no ya equilibrio competitivo únicamente-- no eran constructivos. El teorema de Kakutani permite afirmar que las curvas de oferta y demanda se cruzan, pero no da indicación alguna sobre cómo se calculan precios y cantidades de equilibrio. Diez años después de Arrow y Debreu el profesor Herbert Scarf todavía indicaba en sus clases en la Universidad de Yale que no se conocía algoritmo alguno que permitiera determinar la solución de equilibrio del modelo de Walras salvo en casos muy especiales, siendo el más notable por la popularidad adquirida en estudios empíricos el modelo de insumo-producto de Leontief (1941). El esquema de Leontief es el Tableau Economique de Quesnay y el modelo de equilibrio general de Walras muy simplificado, tanto que se puede resolver por medio de técnicas de álgebra lineal, que adquieren una forma muy simple. "El análisis de insumo-producto dió contenido numérico a la teoría



económica del equilibrio general y demostró su utilidad práctica en planificación y predicción económica" (Spiegel, 1971). Simplificaciones similares las hallamos en la teoría del desarrollo económico, como en los estudios de Chenery, quien trabajando con Kretschmer (1956) y Uzawa (1958) elaboró un sistema de equilibrio general donde se tomaban en cuenta no solamente las relaciones interindustriales como en el caso de Leontief sino algunas posibilidades de intercambio bajo la forma de funciones de oferta y demanda internacionales que dependían del precio. También fue posible hallar soluciones para este modelo. Pero no era el sistema general walrasiano, que, como es sabido ya desde la época de Walras (1874) y de Marshall (1879), en especial en la teoría del comercio internacional, permitía la existencia de soluciones múltiples. Todos los modelos resueltos hasta la época de Arrow y Debreu eran modelos que evidentemente tenían una solución única, de modo que estos ejemplos de Walras, Marshall y otros posteriores de Harry Johnson (1959) no se hallaban incluidos. Si se quería considerar la posibilidad de analizar éstos era necesario descubrir métodos de solución más generales. Sin un método de solución, poca esperanza había de aplicaciones prácticas del sistema completo.

Estas consideraciones nos llevan a seguir una rama distinta del árbol del pensamiento económico, en la que los investigadores estaban interesados no sólo en la teoría pura sino en la aplicación del conocimiento económico a la formulación de medidas de política económica. El primero en tener tales inclinaciones en relación con el modelo de equilibrio general fué Irving Fisher.

De acuerdo con John Perry Miller (1967) la vida de Fisher se extendió de 1867 hasta 1947. Estudió matemática y ciencias con Willard Gibbs, recibiendo su doctorado en 1891, el primero en economía pura otorgado por la Universidad de Yale. Su tesis doctoral, "Investigaciones matemáticas en la teoría del valor y precios" (Fisher, 1892), de inmediato mereció el aplauso de Francis Y. Edgeworth de Oxford y marca un hito en el desarrollo de economía matemática. Unos cincuenta y cinco años más tarde, Ragnar Frisch (1947) diría que "será difícil hallar una obra única que haya tenido más influencia que la tesis de Fisher". A pesar de que mucho de su trabajo había sido anticipado por Walras y Edgeworth, él desarrolló su propia versión en desconocimiento del trabajo previo de ellos.

En dicha tesis se "describe un artefacto analógico mecánico e hidráulico pensado para calcular precios de equilibrio para un modelo general competitivo...

Al menos dos versiones del artefacto de Fisher fueron construidas y aparentemente funcionaron exitosamente. Los artefactos lamentablemente se perdieron, pero existen varias fotografías que pueden verse en la edición del volumen de Fisher reeditado en 1961 por Yale University Press.

El equipo parece sumamente extraño y anticuado en esta era de computadoras digitales de alta velocidad. Sumergidos en una gran tina llena de agua hay cierto número de recipientes cuyos perfiles irregulares están relacionados con las utilidades marginales de los consumidores por las distintas mercancías. Cada recipiente está

construido en parte de cuero flexible, con el aspecto de un fuelle que se expande y contrae en respuesta a cambios en los precios. Los recipientes están conectados por medio de un elaborado sistema de varillas, bisagras, y tubos llenos de agua.

A fin de especificar los ingresos iniciales en dólares de los consumidores, una fila de símbolos debe ajustarse a una altura específica, y en el modelo de intercambio puro, una serie de ajustes similar se hace para proveer información sobre los stocks iniciales de mercancías antes de que comience el intercambio. Los niveles de precios y asignaciones competitivos se determinan entonces cuando el sistema alcanza un estado físico de equilibrio" (Scarf, 1967):

En desconocimiento de los artefactos de Fisher, Barone (1908) discutió y rechazó la posibilidad de resolver las ecuaciones de equilibrio porque las dificultades computacionales serían insalvables. Este argumento fué compartido más tarde por Robbins (1934) --cuyo fallecimiento tuvimos que lamentar hace dos meses-- y por Hayek (1940). Dadas las técnicas de cómputo de la época, el argumento seguramente era válido.

Lange (1936), quien sugiriera utilizar el mercado como una especie de computadora para resolver el sistema de ecuaciones en el caso de una economía socialista, treinta años después, tomó en cuenta el avance en la tecnología de la computación al escribir que "si tuviera que reescribir mi ensayo hoy en día, mi tarea sería mucho más sencilla. Mi respuesta a Hayek y Robbins sería: cuál es el problema? Pongamos las ecuaciones simultáneas en una computadora elec

trónica y obtendremos la solución en menos de un segundo. El proceso de mercado con sus torpes tâtonnements parece anticuado. Por cierto, puede ser considerado como un medio de computación de la era pre-electrónica" (Lange, 1967).

"Lamentablemente, aún la gran computadora electrónica no ha logrado que se puedan calcular soluciones de equilibrio sin esfuerzo" (Scarf, 1973).

Fisher, junto con Frisch y Roos, después de una reunión en New Haven en 1928, organiza la Sociedad Econométrica durante un congreso en Cleveland, en Diciembre de 1930. Fisher fué el primer presidente de la nueva sociedad.

Estos tres economistas también jugaron un rol preponderante en persuadir a Alfred Cowles a establecer y apoyar a la Comisión Cowles para la Investigación en Economía en Colorado Springs en 1932, bajo el auspicio de la Sociedad Econométrica. "La Comisión se mudó a Chicago en 1939, y luego a Yale en 1955 donde fué rebautizada Fundación Cowles. Su localización en Yale es un tributo adecuado para Fisher, quien había hecho tanto para nutrir la investigación y la enseñanza matemática y cuantitativa en economía" (Miller, 1967).

Fué en ese ambiente que tuve la suerte de perfeccionar mis estudios, a principios de la década de 1960. En ese momento comencé a interesarme por el problema del cálculo del equilibrio, diez años después de la publicación de la demostración de existencia del equilibrio en el modelo walrasiano de Arrow y Debreu. Debía elegir un tema para mi tesis doctoral.

El teorema de Kakutani, que es la base sobre la que se apoyaron Arrow y Debreu, permite afirmar que una solución existe, pero no da indicación alguna de cómo esa solución se calcula. Por lo tanto, si bien se había dado un paso adelante mostrando que podía ser interesante aplicar este modelo en la práctica, todavía no era posible hacerlo efectivamente porque no se sabía cómo calcular una solución excepto en los casos especiales que ya se han enumerado.

Se me ocurrió tratar de encontrar una forma distinta de demostrar la existencia de una solución, una forma constructiva que simultáneamente determinara una solución, calculándola efectivamente. Con ello, con el tiempo, se podría usar este modelo para fines de determinar políticas económicas y predecir la marcha de la economía.

La necesidad de hallar una manera de posibilitar la utilización de esquemas de equilibrio general me indujo a investigar la posibilidad de resolver el modelo buscando una demostración alternativa de la existencia de una solución que no utilizara un teorema de punto fijo. Por supuesto hoy sabemos que dicha búsqueda es como la del vellocino de oro. Desde el punto de vista lógico, la existencia de una solución del modelo de Walras es equivalente a la existencia de un punto fijo de transformaciones que cumplen con las hipótesis del teorema de Kakutani, en el sentido de que no sólo puede demostrarse la existencia de equilibrio en base a dicho teorema, sino que también es posible demostrar el teorema de Kakutani en base a la hipótesis de la existencia de un equilibrio competitivo en el modelo de Walras, independientemente de las formas particulares de las relaciones funcionales que se adopten.

Esta última equivalencia la había demostrado Hirofumi Uzawa (1962) unos años antes. Pero no estaba claro en ese momento si realmente las funciones de oferta y demanda que él utilizaba, es decir, funciones arbitrarias excepto por ser contínuas y homogéneas y satisfacer la ley de Walras, podrían ser obtenida por agregación partiendo de un conjunto de consumidores que maximizan sus preferencias y de productores que maximizan sus beneficios. Esto recién se pudo demostrar mucho después, en la década de 1970; Hugo Sonnenschein (1973) conjeturó que la teoría microeconómica no proporciona restricción alguna en cuanto a la forma de la función de demanda agregada excepto las dos propiedades recién enumeradas. Lo demostró para el caso de ciertas funciones de tipo especial; más tarde el disertante (Mantel, 1974) pudo demostrar que eso es así en casos mucho más generales, y como en tantos otros temas la última palabra --la demostración de la equivalencia completa-- sobre éste la dió Gerard Debreu (1974) hace unos diez años. Con estas investigaciones se dió el último paso que faltaba para que el teorema de Uzawa permitiera concluir que el problema matemático de Kakutani y el económico de Walras son equivalentes desde el punto de vista puramente lógico.

Me llevó un tiempo percibir que estaba buscando una solución que hoy se sabe que no es posible obtener. Por lo que se acaba de explicar, no se puede calcular una solución de equilibrio por métodos que no permitan también demostrar el teorema de Kakutani.

Sin embargo, la investigación no fue estéril, pues produjo como subproducto el primer método para calcular una solución del mode

lo de Walras (Mantel, 1965). Lamentablemente no me percaté de ello en su momento, porque la pregunta que me formulara no era la correcta. Yo buscaba un método para aproximar la solución, y eso no es posible en general. La pregunta correcta la formuló Scarf (1967); hoy el algoritmo resultante lleva su nombre.

En esos momentos yo trataba de buscar algo que me permitiera calcular los precios de equilibrio, prefijando cierto margen de error arbitrariamente pequeño.

Si la función de oferta tiene un tramo decreciente, caso que como es sabido puede darse en mercados como el de trabajo, es posible apreciar que pueden existir muchos sistemas de precios para los que oferta y demanda son casi coincidentes. Siempre es posible imaginar curvas suficientemente irregulares como para que se intersequen en un punto alejado de uno cualquiera de los ya representados. La única medida de "cercanía" de las dos curvas de que disponemos es la diferencia entre cantidad ofrecida y demandada, ya que dado cualquier número razonable de mercados no es posible graficar las relaciones entre precio y cantidad para guiar nuestros pasos. Cualquier algoritmo práctico tiene que tomar una medida asociada con la discrepancia entre oferta y demanda para decidir cuándo se ha alcanzado un punto que para todos los fines puede jugar el papel de punto de equilibrio.

Está claro entonces que estar "cerca" del equilibrio sólo puede significar en la práctica que oferta y demanda están casi iguales, no que precios y cantidades están cerca del equilibrio desconocido. No es posible calcular la distancia al punto de equilibrio

sin saber dónde éste se encuentra, y tampoco puede saberse si se está cerca sin calcular dicha distancia.

Scarf pudo percibir que desde el punto de vista de las aplicaciones prácticas no interesa realmente determinar una solución cercana a la verdadera solución de equilibrio. En general basta con determinar un sistema de precios para los que oferta y demanda son casi iguales. Este es el sentido en que se entiende hoy en día el cómputo de una solución aproximada de un sistema de equilibrio general.

Han pasado casi veinte años desde que sabemos cómo resolver el modelo de Walras y sus numerosos descendientes, enumerados anteriormente. El progreso de las técnicas de solución es tan acelerado, que hoy en día no es mucho más difícil determinar la solución de un modelo de equilibrio multisectorial altamente no lineal que uno lineal como el modelo de Leontief. Esto sin dejar de mencionar el éxito que han tenido los modelos más simples inspirados en el walrasiano.

Después de la aparición en 1973 del libro de Scarf sobre el cómputo de equilibrios económicos hubo una verdadera explosión de aplicaciones. No se detallará aquí la larguísima lista de propuestas alternativas al algoritmo básico de Scarf ni los muchos experimentos llevados a cabo para conocer la eficiencia de otros métodos que en casos especiales pueden llevar a la solución (Ginsburgh y Waelbroeck, 1978, 1979); sólo se mencionarán las aplicaciones económicas más importantes.

Una gran parte de dichas aplicaciones se refieren a problemas



de política tributaria. Después de las demostraciones de consistencia del modelo walrasiano ampliado para la inclusión de impuestos del disertante (Mantel, 1970, 1975), de Diamond y Mirrlees (1971) y de Shoven y Whalley (1973), comenzaron a surgir estudios empíricos sobre la evaluación de la política tributaria (Shoven, 1983a), de su incidencia y efectos sobre la eficiencia (Shoven, 1983b), de tributo óptimos (Harris y MacKinnon, 1979), y de la determinación de políticas tributarias alternativas de rendimientos similares (Shoven y Whalley, 1977). Una mayoría de las aplicaciones se hicieron para los Estados Unidos de Norteamérica --política tributaria general (Fullerton, Shoven y Whalley, 1978), impuestos personales y a las sociedades (Fullerton, et.al., 1979 y 1981), efectos de reemplazo del impuesto al ingreso por uno progresivo al consumo (Fullerton, Shoven y Whalley, 1983), efecto de impuestos diferenciales al trato de los ingresos del capital (Shoven y Whalley, 1972)-- y el Reino Unido --política de impuestos y subsidios (Piggott y Whalley, 1977), efectos de cambios del sistema tributario (Whalley, 1975), e impacto económico de dicho sistema (Whalley, 1977)--. También es de mencionar un estudio sobre el efecto simultáneo de políticas tributarias y monetarias (Feltenstein, 1981).

Otros trabajos se centraron sobre el comercio internacional, tanto desde el punto de vista mundial (Ginsburgh y Waelbroeck, 1975; Mansur y Whalley, 1982a) y del equilibrio internacional en la presencia de tarifas (Shoven y Whalley, 1974), como del de la integración económica (Whalley, 1979) y la situación de países particulares frente a la escasez de divisas (Dervis, de Melo y Robinson, 1981) y de

las restricciones al comercio (Feltenstein, 1980).

Estudios sobre economías regionales han analizado la transferencia de ingresos entre jurisdicciones (Mansur y Whalley, 1982b) y la asignación de recursos en modelos espaciales urbanos (Richter, 1980); sobre planificación se han estudiado temas de industrialización óptima (Brada, Jackson y King, 1981), asignación de bienes necesarios a consumidores de bajos ingresos (Feltenstein, 1983), y determinación del equilibrio en economías de tipo soviético (Feltenstein, 1979).

Además se ha estudiado la producción y la provisión pública de bienes (Piggott y Whalley, 1982), el equilibrio de mercado en la presencia de bienes públicos (Richter, 1978), el desempleo (van der Laan, 1982), la determinación de un stock de capital invariante bajo optimización (Hansen y Koopmans, 1972), la incorporación del modelo de análisis de actividades (Ginsburgh y Waelbroeck, 1980), la política de intervención de precios (Imam y Whalley, 1982), y problemas energéticos interregionales (Manne, Kim y Wilson, 1980).

Muchos otros estudios pueden apreciarse en el libro compilado por Scarf y Shoven sobre "Análisis de Equilibrio General Aplicado" aparecido recientemente (1984); uno de los capítulos de este libro describe los modernos métodos econométricos que se encuentran a disposición del investigador en este campo (Jorgenson, 1984).

Es de lamentar que esta profusión de estudios no incluya alguno realizado en nuestro país, a pesar de que las técnicas necesarias son conocidas en él desde hace veinte años. El motivo es por supuesto la escasez de fondos dedicados a la investigación económica, que

impiden el acceso de los investigadores a las modernas facilidades de cómputo. Hagamos votos para que esta situación se corrija algún día y veamos las nuevas técnicas aplicadas a la determinación de medidas de política económica que aseguren el progreso y el bienestar de la Argentina.

## REFERENCIAS.

- Arrow, K.J., y G. Debreu, 1954, Existence of an equilibrium of a competitive economy, *Econometrica* 22, 265-290.
- Arrow, K.J., y M. Intriligator, 1981, 1982, *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. I y II, Amsterdam: North Holland.
- Barone, E., 1908, Il ministero della produzione nello stato collectivista, *Giornale degli Economisti e Rivista Statistica* 37, 267-293, 391-414.
- Bowley, A.L., 1924, *Mathematical groundwork of economics*, Oxford University Press.
- Brada, J.C.; Jackson, M.R. y King, A.E., 1981, The optimal rate of industrialization in developed and developing centrally-planned economies: A general equilibrium approach, *World Development* 9, 991-1004.
- Brouwer, L.E.J., 1910, Ueber eindeutige, stetige Transformationen von Flaechen in Sich, *Mathematische Annalen* 67, 176-180.
- Cassel, G., 1918, *Theoretische Sozialoekonomie*. Traducción: *Economía Social Teórica*, Madrid: Aguilar, 1954.
- Cournot, A., 1828, *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*.
- Charlesworth, J.C. (comp.), 1963, *Mathematics and the Social Sciences*. Filadelfia: The American Academy of Political and Social Science.
- Chenery, H.B., y K. Krestschmer, 1956, Resource allocation for economic development, *Econometrica* 24, 365-399.
- Chenery, H.B., y H. Uzawa, 1958, Non-linear programming in economic development, en K.J. Arrow, L. Hurwicz y H. Uzawa, *Studies in Linear and Non-linear Programming*. Stanford University Press, 203-229.
- Dantzig, G.B., 1949, Programming of interdependent activities, II: Mathematical model, *Econometrica* 17, 200-211.
- Debreu, G., 1952, A social equilibrium existence theorem, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 38, 886-893.
- Debreu, G., 1959, *Theory of Value*, New York: Wiley.
- Debreu, G., 1974, Excess demand functions, *Journal of Mathematical Economics* 1, 15-23.
- Dervis, K., de Melo, J. y Robinson, S., 1981, A general equilibrium analysis of foreign exchange shortages in a developing economy, *Economic Journal* 91, 891-906.

- Diamond, P.A., y Mirrless, J.A., 1971, Optimal taxation and public production, *American Economic Review* 61, 8-27, 261-278.
- Dupuit, J., 1844, De la mesure de l'utilité des travaux publics, *Annales des Ponts et Chaussées*, 2d. series, Vol. 8.
- Fellner, W., e.a., 1967, Ten economic studies in the tradition of Irving Fischer, New York: Wiley.
- Feltenstein, A., 1979, Market equilibrium in a model of a planned economy of the Soviet type: A proof of existence and results of numerical simulations, *Review of Economic Studies* 46, 631-652.
- Feltenstein, A., 1980, A general equilibrium approach to the analysis of trade restrictions with an application to Argentina. Trabajo presentado al Primer Congreso Regional Latinoamericano de la Sociedad Económica, Buenos Aires. *International Monetary Fund Staff Papers* 27, 749-84.
- Feltenstein, A., 1981, A general-equilibrium approach to the analysis of monetary and fiscal policies, *International Monetary Fund Staff Papers*, 28, 653-81.
- Feltenstein, A., 1983, The allocation of badly needed goods to low-income consumers: A system of central planning without redistributive taxation, *Journal of Comparative Economics* 7, 52-70.
- Fisher, I., 1892, *Mathematical investigations in the theory of value and prices*. New Haven: Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences 9.
- Frisch, R., 1947, Irving Fisher at eighty, *Econometrica* 15, 71-73.
- Fullerton, D., et al., 1979, Corporate and personal tax integration in the U.S.: Some preliminary findings from a general equilibrium analysis, en R. Havenman y K. Hollenbeck, comp., *Microeconomic Simulation*, Madison: Institute for Research in Poverty.
- Fullerton, D., A.T. King, J.B. Shoven, y J. Whalley, 1981, Corporate tax integration in the U.S.: A general equilibrium approach. *American Economic Review*, 71, 677-691.
- Fullerton, D., J.B. Shoven, y J. Whalley, 1978, A general equilibrium analysis of U.S. taxation policy, 1978 Compendium of Tax Research, U.S. Treasury Department, Office of Tax Analysis (U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.)

- Fullerton, D., J.B. Shoven, y J. Whalley, 1983, Replacing the U.S. income tax with a progressive consumption tax: A sequenced general equilibrium approach, *Journal of Public Economics*, 20, 3-23.
- Gale, D., 1955, The law of supply and demand, *Mathematica Scandinavica* 3, 155-169.
- Gerwin, R., 1967, *Autómatas inteligentes*, Madrid: Daimon.
- Ginsburgh, V., y J. Waelbroeck, 1975, A general equilibrium model of world trade, partes I y II, *Cowles Foundation Discussion Papers*, 412 y 413.
- Ginsburgh, V., y J. Waelbroeck, 1978, Computational experience with a large general equilibrium model, en J. Los, comp., *Computing equilibria: How and why*.
- Ginsburgh, V., y J. Waelbroeck, 1979, A note on the stability of tâtonnement processes for computing equilibria, *International Economic Review*, 20, 367-380.
- Ginsburgh, V., y J. Waelbroeck, 1980, *Activity analysis and general equilibrium modeling*, Amsterdam: North-Holland.
- Hansen, T., y T.C. Koopmans, 1972, On the definition and computation of a capital stock invariant under optimalization, *Journal of Economic Theory* 5, 487-523
- Harris, R.G., y J.G. MacKinnon, 1979, Computing optimal tax equilibria *Journal of Public Economics* 11, 197.
- Harrod, R.F., 1938, The scope and method of economics, *Economic Journal* 48, 383-412.
- Hayek, F.A., 1940, Socialist calculation: The competitive solution, *Economica* 7, 125-149.
- Hicks, J.R., 1939, *Value and Capital*. New York: Oxford University Press.
- Hurwicz, L., 1963, Mathematics in Economics: Language and Instrument, in *Mathematics and the Social Sciences*, J.C. Charlesworth (comp.), 1-11.
- Imam, H., y J. Whalley, 1982, General equilibrium with price intervention policies: A computational approach, *Journal of Public Economics* 18, 105.
- Johnson, H.G., 1959, International trade, income distribution, and the offer curve, *Manchester School of Economic and Social Studies* 27, 241-260.

- Jorgenson, D.W., 1984, Econometric methods for applied general equilibrium analysis, en H.E. Scarf y J.B. Shoven, comp., Applied General equilibrium analysis, capítulo 4.
- Kakutani, S., 1941, A generalization of Brouwer's fixed point theorem, Duke Mathematical Journal 8, 457-459.
- Kantorovich, L.V., 1942, Sobre la traslocación de masas (en ruso), Dokl. Akad. Nauk. U.S.S.R, 37, 199-201.
- Keynes, J.M., 1936, The general theory of employment, interest and money, Londres: Macmillan.
- Koopmans, T.C., 1951, comp., Activity analysis of production and allocation, New York; Wiley.
- Koopmans, T.C., 1957, Three essays on the state of economic science, New York, McGraw-Hill.
- Koopmans, T.C., 1964, Economic growth at a maximal rate, Quarterly Journal of Economics 78, 355-394.
- van der Laan, G., 1982, Simplicial approximation of unemployment equilibria, Journal of Mathematical Economics 9, 83-97.
- Lange, O., 1936, On the economic theory of socialism. Review of Economic Studies 4, 53-71, 123-42.
- Lange, O.R., 1967, The computer and the market, en Socialism, Capitalism, and Economic Growth, C.H. Feinstein (comp.), 158-161. Cambridge: Cambridge University Press.
- Leontief, W.W., 1941, The structure of the American economy 1919-1939. New York: Oxford University Press.
- McKenzie, L., 1955, Competitive equilibrium with dependent consumer preferences, en H.A. Antosiewicz (comp.), Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming. Washington, 277-294.
- Manne, A., S. Kim y T.F. Wilson, 1980, A three-region model of energy, international trade and economic growth, Stanford University, Department of Operations Research, mimeografiado.
- Mansur, A., y J. Whalley, 1982a, A decomposition algorithm for general equilibrium computation with application to international trade models, Econometrica 50, 1547-1558.
- Mansur, A., y J. Whalley, 1982b, General equilibrium in multi-jurisdictional models with income interdependence, Journal of Economic Theory 26, 183-190.
- Mantel, R.R., 1965, Equilibrio en una economía competitiva: Una prueba de su existencia, Buenos Aires: Instituto Di Tella, DI 10.

- Mantel, R.R., 1970, Política tributaria en una economía competitiva, *Económica (La Plata)* 16, 289-312.
- Mantel, R.R., 1975, General equilibrium and optimal taxes, *Journal of Mathematical Economics* 2, 187-200.
- Mantel, R.R., 1974, On the characterization of aggregate excess demand, *Journal of Economic Theory* 7, 348-353.
- Mantel, R.R., 1984, Economía matemática, su evolución histórica y estado actual, *Económica (La Plata)*, en prensa.
- Marshall, A., 1879, *The Pure Theory of Foreign Trade*.
- Menger, K., 1973, Austrian marginalism and mathematical economics, en J.R. Hicks y W. Weber (comp.), *Carl Menger and the Austrian school of economics*, Oxford: Clarendon Press.
- Menger, C., 1924, *Origins of Sociology*. Chicago: Chicago University Press.
- Miller, J.P., 1967, Irving Fisher of Yale, en W. Fellner e.a., *Ten economic studies in the tradition of Irving Fisher*, 1-16.
- Morgenstern, Oskar, 1963, "Limits to the uses of mathematics in economics", en *Mathematics and the Social Sciences*, James C. Charlesworth (comp.), 12-29.
- Nash, J.F., 1950, Equilibrium in n-person games, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36, 48-49.
- Neisser, H., 1932, Lohnhoehe und Beschaeftigungsgrad im Marktgleichgewicht, *Weltwirtschaftliches Archiv* 36, 415-455.
- von Neumann, J., 1928, Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Mathematische Annalen* 100, 295-320.
- von Neumann, J., 1937, Ueber ein Oekonomisches Gleichungs-System und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes, en Karl Menger (comp.), *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* 8, 1935-36.
- von Neumann, J., y O. Morgenstern, 1944, *Theory of games and economic behavior*, Princeton: Princeton University Press.
- Nikaidô, H., 1956, On the classical multilateral exchange problem, *Metroeconomica* 8, 135-145.
- Pareto, V., 1896, *Cours d'economie politique*. Lausanne: Rouge.
- Pareto, V., 1909, *Manuel d'economie politique*. Paris: Giad.



- Piggott, J.R., y J. Whalley, 1977, General equilibrium investigation of U.K. tax subsidy policy: A progress report, en M.J. Artis y A.R. Nobay, comp., Studies in Modern Economic Analysis. Oxford: B. Blackwell.
- Piggott, J., y J. Whalley, 1982, General equilibrium with public production and public provision: Computation, and results for the U.K. case, Zeitschrift fuer Nationaloekonomie, Suplemento 2, 1-26.
- Richter, D.K., 1978, The computation of a general equilibrium public goods economy, Mathematical Programming 14, 186-207.
- Richter, D.K., 1980, A computational approach to resource allocation in spatial urban models, Regional Science and Urban Economics 10, 17-42.
- Robbins, L.C., 1934, The great depression. Londres: Macmillan.
- Robertson, D.H., 1940, Mr. Keynes and the Rate of interest, en Essays in Monetary Theory, Londres: King.
- Roll, E., 1956, A History of Economic Thought, Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- Samuelson, P.A., 1947, Foundations of Economic Analysis, Cambridge: Harvard University Press.
- Scarf, H.E., 1967, On the computation of equilibrium prices, en W. Fellner e.a., Ten economic studies in the tradition of Irving Fisher, 207-230.
- Scarf, H.E., 1973, The computation of economic equilibria, New Haven: Yale University Press.
- Scarf, H.E., y J.B. Shoven, comp., 1984, Applied General equilibrium analysis, Cambridge University Press.
- Schlesinger, K., 1934, Ueber die Produktionsgleichungen der oekonomischen Wertlehre, Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums 6, 10-11.
- Schumpeter, J.A., 1951, Ten great economists from Marx to Keynes, New York: Oxford University Press.
- Schumpeter, J.A., 1954, History of Economic Analysis, New York: Oxford University Press
- Shoven, John B., 1983a, Applied general equilibrium tax modeling, International Monetary Fund Staff Papers 30, 394-420.

- Shoven, J.B., 1983b, The incidence y efficiency effects of taxes on income from capital, *Journal of Political Economy* 84, 1261-1283.
- Shoven, J., y J. Whalley, 1972, A general equilibrium calculation of the effects of differential taxation of income from capital in the U.S., *Journal of Public Economics* 1, 281-231.
- Shoven, J., y J. Whalley, 1973, General equilibrium with taxes: A computational procedure and an existence proof, *Review of Economic Studies* 40, 475-490.
- Shoven, J., y J. Whalley, 1974, On the computation of competitive equilibrium in international markets with tariffs, *International Journal of Economics* 4, 341-354.
- Shoven, J., y J. Whalley, 1977, Equal yield tax alternatives: General equilibrium computational techniques, *Journal of Public Economics* 8, 211-224.
- Sonnenschein, H., 1973, Do Walras' identity and continuity characterize the class of community excess demand functions?, *Journal of Economic Theory* 6, 345-354.
- Spiegel, H.W., 1971, *The growth of economic thourght*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- von Stackelberg, H., 1933, Zwei Kritische Bemerkungen zur Preistheorie Gustav Cassels, *Zeitschrift fuer Nationaloekonomie* 4, 456-472.
- Stigler, G., 1964, *Statistical studies in the history of economic thought*, en G. Stigler, *Essays in the history of economics*, Chicago: University of Chicago Press.
- de Torres, M., 1954, *Introducción*, en *Principios de Economía de A. Marshall*, Madrid: Aguilar.
- Uzawa, U., 1962, Walras' existence theorem and Brouwer's fixed point theorem, *Economic Studies Quarterly* 13, 1.
- Wald, A., 1934, Ueber die Produktionsgleichungen der oekonomischen Wertlehre, *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* 6, 12-20.
- Wald, A., 1936, Ueber einige Gleichungssysteme der mathematischen Oekonomie, *Zeitschrift fuer Nationaloekonomie* 7, 637-670.
- Walras, L., 1873, *Principe d'une theorie mathemafique de l'echange: Equations de l'echange*, París, 1873.
- Walras, L., 1874, *Elements d'economie politique pure*. Lausanne: L. Corbaz.

- Walras, L., 1900, *E'léments d' économie politique pure*, 4a. edición, Lausana: F. Rouge.
- Walras, L., 1939, Prefacio a *L' Economie pure du capitalisme* de E. Antonelli, citado por Schumpeter (1954).
- Weintraub, E.R., 1983, On the existence of a competitive equilibrium 1930-1954, *The Journal of Economic Literature* 21, 1-39.
- Whalley, J., 1975, A general equilibrium assessment of the 1973 United Kingdom tax changes, *Economica* 42, 139-161.
- Whalley, J., 1977, The United Kingdom tax system 1968-70: Some fixed point indications of its economic impact, *Econometrica* 45, N° 8, 1837-58.
- Whalley, J., 1979, Uniform domestic tax rates, trade distortions and economic integration, *Journal of Public Economics* 11, 213.
- Zeuthen, F., 1932, Das Prinzip der Knappheit, technische Kombination und oekonomische Qualitaet, *Zeitschrift fuer Nationaloekonomie* 4, 1-24.